



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**DEFORMAČNÍ A NAPĚŤOVÁ ANALÝZA PRUTOVÉ  
SOUSTAVY**

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF THE BAR SYSTEM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Miroslav Pop**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Martin Houfek, Ph.D.**

**BRNO 2017**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Miroslav Pop**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Martin Houfek, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Deformační a napěťová analýza prutové soustavy

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prutové soustavy se nejvíce uplatňují v konstrukcích v pozemním stavebnictví. Výhodou těchto konstrukcí je jejich ekonomičnost a zároveň menší hmotnost oproti jiným strojním nebo stavebním soustavám. Dalším důvodem proč se zabývat prutovými konstrukcemi je vysoký rozvoj telekomunikačních technologií, což z pravidla vede z hlediska strojírenství ke konstrukci nosných stožárů např: pro přenosové antény atd... . Další významnou výhodou prutových konstrukcí je v návrhu velkorozměrných nosných konstrukcí spojených s designérským průmyslem (haly, stadiony atd...).

### Cíle bakalářské práce:

- Rešeršní studie prutových soustav a jejich využití.
- Ukázka výpočtu prutové soustavy (analytický výpočet).
- Numerická verifikace analytického výpočtu.

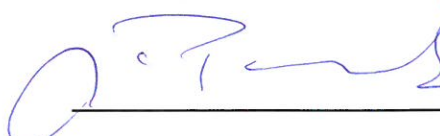
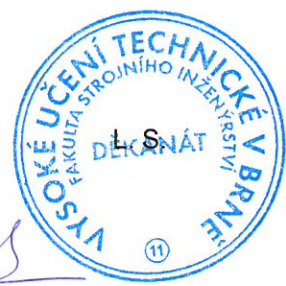
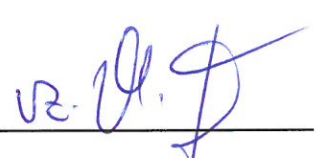
### Seznam literatury:

Karel Juliš, Otakar Tepřík, Adolf Slavík, STATIKA, 1987, SNTL – Nakladatelství technické literatury, s. 216,

Přemysl Janíček, Emanuel Ondřáček, Jan Vrbka, Jiří Burša, MECHANIKA TĚLES, Pružnost a pevnost I, březen 2004, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, s. 287., ISBN 80-214-2592-X

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 18. 10. 2016

		
_____ prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. ředitel ústavu		_____ doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou prutových soustav, které představují speciální typ konstrukce hojně používaný ve stavebním i strojním průmyslu. V úvodní části je uveden teoretický základ a jsou popsány metody statického řešení prutových soustav, dále je popsáno jejich namáhání a jsou odvozeny vztahy, které byly následně využity pro výpočet konkrétního příkladu. V praktické části se práce věnuje analytickému výpočtu rovinné prutové soustavy ve tvaru stožáru elektrického vedení, pro kterou jsou navrženy průřezy prutů a jsou vyčísleny velikosti napětí a deformačních posuvů. Pro výpočet byla použita obecná styčnicková metoda a průřezy byly navrženy vzhledem k meznímu stavu pružnosti a meznímu stavu vzpěrné stability. V závěru práce byly numerickým řešením v programu ANSYS Workbench ověřeny výsledky analytického výpočtu.

## **Abstract**

This bachelor's thesis deals with the issue of rod systems, which represent a special type of construction widely used in the building and mechanical industry. In the introductory part is presented a theoretical basis and methods of static solution of rod systems are described, then it is described stress of rod systems and are derived relations that were subsequently used for the calculation of the specific example. In the practical part, the thesis deals with the analytical calculation of the planar rod system in shape of a power line pylon, for which the cross-sections of the members are designed and the magnitude of the stresses and deformation displacements are calculated. For the calculation, the general method of joints was used and cross sections were designed with respect to the elastic limit state and the buckling stability limit state. At the end of the work, the results of the analytical calculation were verified with numerical solution in software ANSYS Workbench.

## **Klíčová slova**

Prutová soustava, příhradová konstrukce, prut, styčnick, metody řešení prutových soustav, namáhání tahem a tlakem

## **Key words**

Rod system, truss construction, truss, joint, methods of rod system solution, tensile and compressive stress and strain



## **Bibliografická citace**

POP, M. *Deformační a napěťová analýza prutové soustavy*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 78 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Martin Houfek, Ph.D.





## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma *Deformační a napěťová analýza prutové soustavy* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Martina Houfka, Ph.D. s využitím vlastních znalostí a uvedených zdrojů.

V Brně dne 25. 5. 2017

.....  
Miroslav Pop



## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Ing. Martinu Houfkovi, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost a za všechny cenné rady týkající se nejen bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu po celou dobu mého studia.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod .....</b>	<b>15</b>
1.1.	Cíle práce.....	16
<b>2</b>	<b>Prutová soustava .....</b>	<b>17</b>
2.1.	Vymezení prutu .....	17
2.2.	Vymezení prutové soustavy .....	18
2.3.	Skutečná podoba prutových soustav .....	18
2.4.	Statická určitost prutové soustavy .....	19
2.4.1.	Vnější statická určitost.....	19
2.4.2.	Vnitřní statická určitost.....	19
2.4.3.	Celková statická určitost.....	19
2.5.	Metody statického řešení prutových soustav.....	20
2.5.1.	Styčnicková metoda obecná .....	20
2.5.2.	Styčnicková metoda postupná .....	21
2.5.3.	Cremonova metoda .....	21
2.5.4.	Průsečná metoda .....	22
2.5.5.	Metoda momentových součtů (Müller-Breslau).....	24
2.5.6.	Metoda myšlených kloubů.....	24
2.5.7.	Metoda náhradních prutů (Hennenbergova).....	25
2.5.8.	Metoda zjednodušování soustav .....	26
2.5.9.	Metoda neurčitého měřítka .....	26
<b>3</b>	<b>Namáhání prostým tahem a tlakem .....</b>	<b>27</b>
3.1.	Přetvoření zatíženého tělesa .....	27
3.2.	Napjatost tělesa.....	28
3.3.	Energie napjatosti .....	29
3.4.	Castiglianova věta .....	29
3.5.	Mezní stavy .....	30
3.5.1.	Mezní stav pružnosti (MSP) .....	30
3.5.2.	Mezní stav vzpěrné stability (MSVS).....	31
3.6.	Návrh průřezů.....	33

<b>4</b>	<b>Deformační a napěťová analýza zvolené prutové soustavy.....</b>	<b>35</b>
4.1.	Výpočet osových sil v prutech první varianty .....	36
4.1.1.	Úplné uvolnění .....	37
4.1.2.	Posouzení statické určitosti soustavy .....	38
4.1.3.	Uvolnění styčníků a sestavení podmínek statické rovnováhy.....	38
4.1.4.	Výsledky.....	41
4.2.	Výpočet osových sil v prutech druhé varianty.....	42
4.2.1.	Úplné uvolnění .....	43
4.2.2.	Posouzení statické určitosti .....	44
4.2.3.	Uvolnění styčníků a sestavení podmínek statické rovnováhy.....	44
4.2.4.	Výsledky.....	45
4.3.	Výpočet osových sil v prutech třetí varianty .....	46
4.3.1.	Úplné uvolnění .....	47
4.3.2.	Posouzení statické určitosti .....	48
4.3.3.	Uvolnění styčníků a sepsání podmínek statické rovnováhy.....	48
4.3.4.	Částečné uvolnění .....	49
4.3.5.	Deformační podmínka.....	50
4.3.6.	Výsledky.....	51
4.4.	Návrh průřezů .....	52
4.4.1.	Návrh totožného průřezu pro všechny pruty soustavy .....	52
4.4.2.	Návrh různých průřezů prutů soustavy .....	56
4.5.	Výpočet deformace prutové soustavy .....	60
4.6.	Numerická verifikace analytického výpočtu .....	62
<b>5</b>	<b>Závěr.....</b>	<b>65</b>
	<b>Seznam použitých zdrojů.....</b>	<b>67</b>
	<b>Seznam použitých zkratk a symbolů.....</b>	<b>68</b>
	<b>Seznam příloh .....</b>	<b>69</b>
	<b>Seznam tabulek.....</b>	<b>69</b>
	<b>Seznam obrázků.....</b>	<b>70</b>

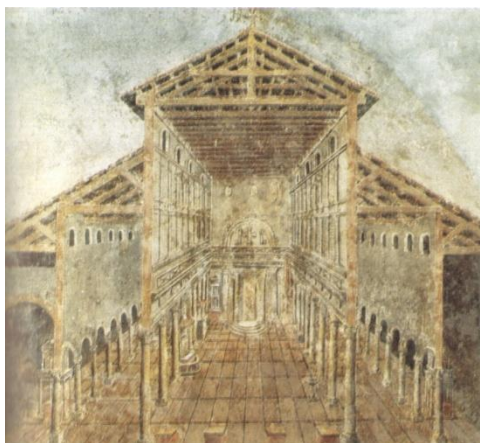


# 1 Úvod

Předložená bakalářská práce se zabývá problematikou prutových soustav, které se hojně používají zejména v pozemním stavebnictví. Za prutovou soustavu se považuje konstrukce sestavená z dlouhých štíhlých těles (prutů), které jsou spolu na svých koncích pevně spojeny. Zabýváme-li se literaturou ohledně zmíněných konstrukcí, dozvídáme se, že jsou běžně pojmenovávány názvem příhradová konstrukce.

Počátky uplatnění prutových soustav sahají až do starého Říma, kde jich už v té době bylo využíváno pro základy střech budov [1] (Obr. 1.1). Veliký rozvoj příhradových konstrukcí ale nastal až v druhé polovině devatenáctého století. Zmíněné konstrukce se začaly používat pro stavbu dlouhých ocelových mostů a také pro stavbu výškových staveb. Mezi nejvýznamnější představitele patří Eiffelova věž postavená roku 1889, která se stala nejvyšší stavbou světa a železniční most Forth Bridge postavený roku 1890 ve Skotsku (Obr. 1.2). Začátkem dvacátého století se prutové soustavy začaly rozšiřovat i do strojího průmyslu pro konstruování stavebních jeřábů, stožárů nesoucích elektrické dráty, nebo například draků prvních letadel. Výhodou prutových soustav v tomto čase byla možnost provedení jejich výpočtu pomocí grafických metod s užitím jednoduchých pomůcek. V padesátých a šedesátých letech minulého století se s příchodem výpočetní techniky začaly k návrhovým výpočtům používat konečnoprvkové metody. Díky využití metod konečných prvků se umožnilo konstruovat mnohem složitější tvary, což mělo za následek mírný ústup prutových soustav. Nicméně i dnes tyto konstrukce nabízejí spoustu výhod, které z nich činí v mnoha případech stále atraktivní řešení. Jako příklad lze uvést nový víceúčelový stadion Krestovsky Stadium v ruském Petrohradu s pohyblivou střechou, která je konstrukčně řešena jako prutová soustava.

Konstrukce na bázi prutových soustav dosahují velikých rozměrů při poměrně malé spotřebě materiálu, tím se snižuje hmotnost a i celkové náklady. Další výhodou prutových soustav je jednoduchost provedení z technologického hlediska, která se projevuje v rychlosti jejich výroby.



**Obr. 1.1** Nástěnná malba baziliky sv. Petra z Vatikánů zobrazující její podobu ve čtvrtém století [9].



**Obr. 1.2** Forth Bridge je železniční most nacházející se ve středním Skotsku severozápadně od Edinburgu. Byl postaven v roce 1890 a jeho celková délka činí 2,5 km [10].

## 1.1. Cíle práce

- rešeršní studie na dané téma bakalářské práce
- analytické řešení zadané prutové soustavy
  - výpočet velikostí osových sil v prutech
  - návrh průřezů prutů
  - vyhodnocení napětí a bezpečností v prutech
  - výpočet deformace prutové soustavy
- numerická verifikace výsledků analytického řešení pomocí výpočetního systému ANSYS Workbench



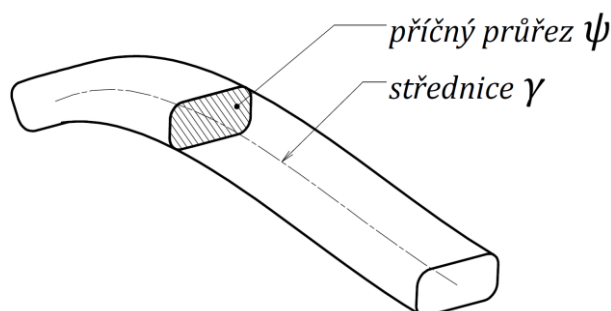
## 2 Prutová soustava

### 2.1. Vymezení prutu

V pružnosti a pevnosti se pro výpočet napjatosti a deformace těles využívají různé výpočtové modely, například prut, stěna, skořepina. Prut je z těchto modelů ten nejjednodušší. Využívá se k výpočtu dlouhých štíhlých těles. Jedná se o idealizaci skutečného tvaru. Podmínkou užití je, aby zkoumané těleso splňovalo určité předpoklady, ty se běžně nazývají jako prutové předpoklady [5]. Příklad prutového tělesa lze vidět na obrázku 2.1.

#### Geometrické předpoklady:

- Prut je geometricky určen střednicí  $\gamma$  a příčným průřezem  $\psi(s)$  v každém místě střednice.
- Střednice  $\gamma$  je spojitá křivka konečné délky, spojující jednotlivé těžiště průřezů  $\psi$ .
- Průřez  $\psi$  je jedno či vícenásobně souvislá oblast vymezená hranicí a lze jej charakterizovat charakteristikami příčných průřezů.
- Nejkratší přípustná délka střednice je minimálně tak velká, jako největší rozměr příčného průřezu.



Obr. 2.1 Prut.

#### Vazbové a zatěžovací předpoklady:

- Veškeré zatížení prutu působí na střednici  $\gamma$ .
- Vazby smí omezovat pouze posuv a úhel natočení střednice.

#### Deformační předpoklady:

- Střednice  $\gamma$  nepřestává být v průběhu deformace spojitou křivkou.
- Příčné průřezy  $\psi$  zůstávají rovinnými příčnými průřezy kolmými na střednici  $\gamma$ .

#### Napjatostní předpoklady:

- Napjatost v kterémkoli místě prutu je určena normálovým napětím  $\sigma$  a smykovým napětím  $\tau$  v řezu kolmém na střednici  $\gamma$ .

## 2.2. Vymezení prutové soustavy

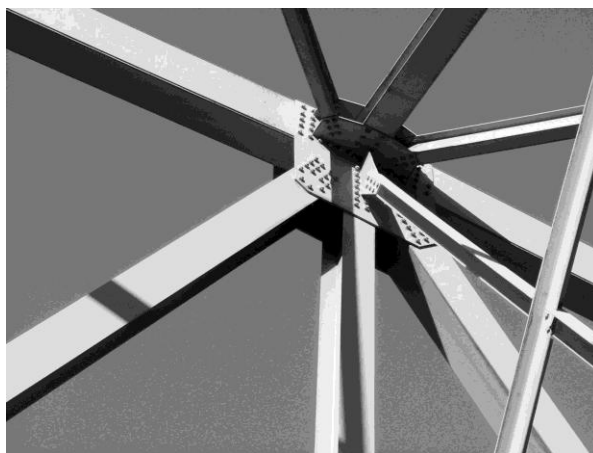
Prutová soustava je výpočetní model používaný pro výpočet příhradových konstrukcí. Ty se skládají z dlouhých štíhlých prutů, které jsou na svých koncích spojeny s ostatními tělesy, místa spojení prutů se nazývají styčníky. Celá prutová soustava je připevněna k základnímu tělesu pomocí vnějších vazeb, uložení může být buď staticky určité, nebo staticky neurčité. Při řešení prutových soustav se předpokládají tyto předpoklady [6]:

- Vazby mezi jednotlivými tělesy soustavy jsou u 3D úloh sférické kinematické dvojice a u 2D úloh rotační kinematické dvojice. Ve vazbách se nepředpokládá tření.
- Prutová soustava obsahuje pouze pruty splňující prutové předpoklady a styčníky. Střednice prutů jsou přímé. Ve styčníku je vždy spojeno dva a více prutů a jejich střednice se v něm protínají v jednom bodě.
- Vnější zatížení prutové soustavy působí pouze ve styčnících.
- Uložení prutové soustavy se základním tělesem je provedeno skrze styčníky.
- Každý prut musí být pomocí styčnicků vázán vždy minimálně ke dvěma jiným prutům a musí být nepohyblivý.

Jsou-li tyto předpoklady splněny, vyskytuje se v prutech pouze namáhání prostým tahem nebo tlakem, jedná se o přímé nezatížené binární členy.

## 2.3. Skutečná podoba prutových soustav

Ve skutečných konstrukcích se spoje jednotlivých prutů realizují například svařováním, šroubováním nebo nýtováním, viz obrázek 2.2. To je v rozporu s předpokladem spojení prutů dokonalými klouby, pruty jsou ve skutečnosti vetknuté, tím přestávají být namáhány pouze prostým tahem či tlakem. Praxe však ukázala, že pokud nejsou pruty příliš krátké, je chyba při výpočtu s dokonalými klouby velmi malá a výpočtový model se blíží skutečnosti velmi dobře [2,3].



**Obr. 2.2** Nýtovaný styčník mostu Hellgate Bridge přes řeku Rogue River v jihozápadním Oregonu [11].

## 2.4. Statická určitost prutové soustavy

Pro navrhování prutových soustav je potřeba zjistit velikosti osových sil v prutech soustavy. Statická určitost hodnotí schopnost určení sil působících na prutovou soustavu z podmínek statické rovnováhy. Rozlišuje se vnější, vnitřní a celková statická určitost prutové soustavy [6].

### 2.4.1. Vnější statická určitost

Vnější statická určitost klasifikuje vazbové uložení prutové soustavy jako celku. Je-li prutová soustava vnějškově staticky určitá, lze dopočítat vnější stykové síly ve vazbách uložení soustavy z podmínek statické rovnováhy, prutová soustava se přitom uvažuje jako jedno těleso. Vnější statická určitost je dána vztahem:

$$s_{ext} = \mu - \nu \quad (2-1)$$

kde:  $\mu$  – počet neznámých parametrů vnějších stykových sil  
 $\nu$  – počet použitelných podmínek statické rovnováhy  
 $s_{ext}$  – stupeň vnější (externí) statické neurčitosti

Stupeň vnější statické neurčitosti  $s_{ext}$  udává, kolikrát je soustava vnějškově staticky neurčitá. Například pokud  $s_{ext} = 2$ , je soustava dvakrát vnějškově staticky neurčitá a bude potřeba částečného uvolnění a sepsání deformační podmínky.

### 2.4.2. Vnitřní statická určitost

Vnitřní statická určitost posuzuje možnost určení osových sil v prutech z podmínek statické rovnováhy jednotlivých styčníků. V každém styčniku působí síly, jejichž nositelky se protínají v jednom bodě. V každém styčniku tedy působí centrální silová soustava, pro kterou lze napsat dvě silové podmínky statické rovnováhy (jedná-li se o rovinnou úlohu, v případě prostorové prutové soustavy, lze sepsat pro každý styčnický tři podmínky). Prutová soustava, ve které je stejný počet neznámých osových sil v prutech jako počet podmínek použitelných k jejich výpočtu, musí splňovat:

$$\text{pro rovinnou prutovou soustavu:} \quad p = 2 \cdot k - 3 \quad (2-2)$$

$$\text{pro rovinnou prostorovou soustavu:} \quad p = 3 \cdot k - 6 \quad (2-3)$$

kde:  $p$  – počet prutů  
 $k$  – počet styčníků

### 2.4.3. Celková statická určitost

Celková statická určitost posuzuje možnost určení všech neznámých parametrů prutové soustavy z podmínek statické rovnováhy jednotlivých styčnicků a i z podmínky statické rovnováhy prutového tělesa jako celku. Jedná se o spojení vnější a vnitřní statické neurčitosti.

Podmínka celkové statické určitosti má tvar:

$$\text{pro rovinnou prutovou soustavu:} \quad p = 2 \cdot k - \mu \quad (2-4)$$

$$\text{pro rovinnou prostorovou soustavu:} \quad p = 3 \cdot k - \mu \quad (2-5)$$

Stupeň celkové statické neurčitosti  $s$  lze potom spočítat ze vztahu:

$$\text{pro rovinnou prutovou soustavu:} \quad s = p + \mu - 2 \cdot k \quad (2-6)$$

$$\text{pro rovinnou prostorovou soustavu:} \quad s = p + \mu - 3 \cdot k \quad (2-7)$$

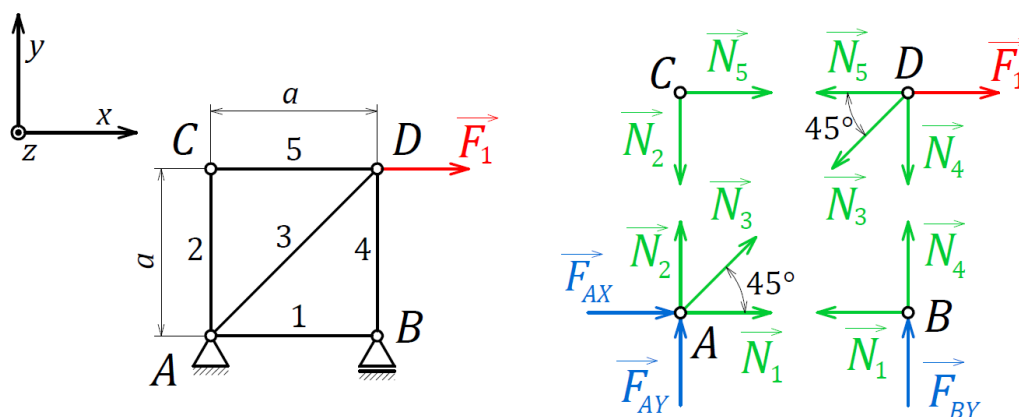
## 2.5. Metody statického řešení prutových soustav

Pro výpočet prutových soustav existuje mnoho různých grafických i početních způsobů, některé ze základních metod budou uvedeny v následujících státech.

Jednotlivé metody budou popsány pro řešení rovinných prutových soustav, jsou však rozšiřitelné i na prostorové prutové soustavy.

### 2.5.1. Styčnická metoda obecná

V rovinné prutové soustavě lze pro libovolný styčník sepsat dvě podmínky statické rovnováhy tzv. styčnické rovnice. Sepsáním všech styčnickových rovnic do soustavy a jejím následným vyřešením se obdrží výsledné síly v jednotlivých prutech a ve vnějších vazbách prutové soustavy. Ukázku řešení prutové soustavy obecnou metodou zobrazuje obrázek 2.3.



Obr. 2.3 Ukázka řešení prutové soustavy obecnou početní styčnickovou metodou.

$$\begin{aligned} A \rightarrow x: & F_{AX} + N_1 + N_3 \cdot \cos(45^\circ) = 0 \\ y: & F_{AY} + N_2 + N_3 \cdot \sin(45^\circ) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \rightarrow x: & -N_1 = 0 \\ y: & F_{BY} + N_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \rightarrow x: & N_5 = 0 \\ y: & -N_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \rightarrow x: & F_1 - N_3 \cdot \cos(45^\circ) - N_5 = 0 \\ y: & -N_3 \cdot \sin(45^\circ) - N_4 = 0 \end{aligned}$$

Ze sepsaných styčnickových rovnic lze dopočítat osové síly v jednotlivých prutech.

*Pozn.: Při uvolňování se volí směr osových sil v prutech ze styčnicku ven, při dodržení této konvence jsou pruty, jejichž osové síly vyšly kladné, namáhány tlakem, a naopak pruty, jejichž osové síly vyšly záporné, jsou namáhány tlakem.*

Velikost sil ve vazbách je možno dopočítat i z podmínek statické rovnováhy prutové soustavy jejím nahrazením tělesem odpovídajícího tvaru, tyto podmínky jsou závislé na styčnickových rovnicích a nejsou potřebné k výpočtu, je ale vhodné je použít ke kontrole výpočtu [2].

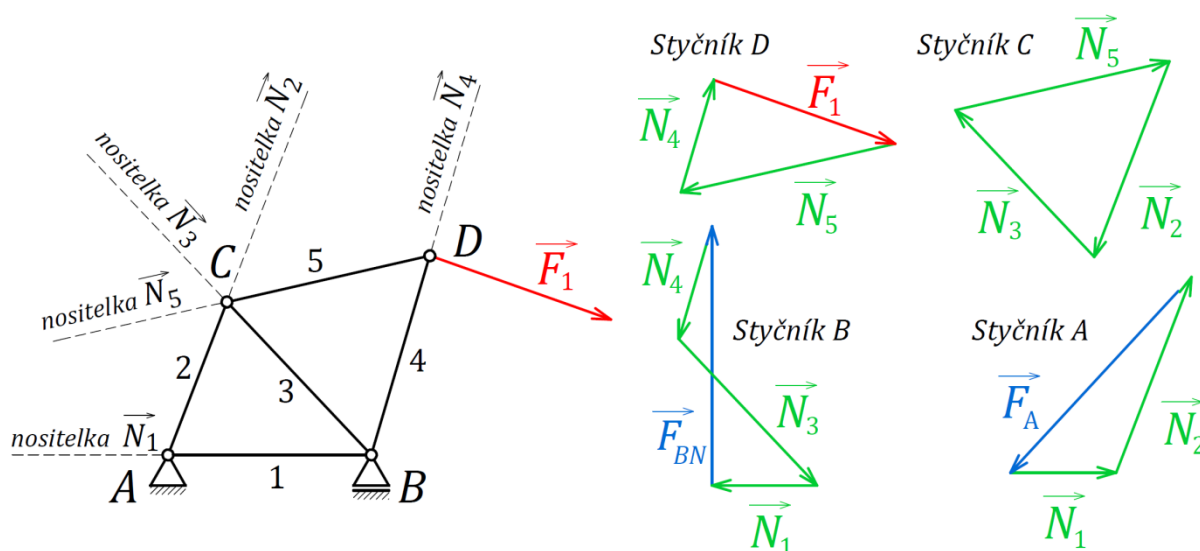
### 2.5.2. Styčnicková metoda postupná

#### Početní řešení:

Postupná metoda je založena na stejném principu jako styčnicková metoda obecná. Rozdíl spočívá v postupu řešení. Styčnický se uvolňuje postupně a postupně se sepisují i styčnickové rovnice. První se uvolní styčnick, na němž jsou neznámé pouze dvě velikosti osové sil v prutech, tzv. dvojný styčnick. V tomto případě lze dopočítat velikosti sil v prutech působících na zmíněný styčnick. Poté se postupuje na další styčnick, vybírá se opět ten, do kterého vstupují dva pruty s neznámými velikostmi osové sil. Dodržením daného postupu, jsou vždy sepsány dvě rovnice o dvou neznámých. Pro použití postupné metody je zapotřebí, aby se v soustavě vždy vyskytoval alespoň jeden styčnick, na němž jsou neznámé dvě osové síly (případně pouze jedna osová síla) v prutech. Postupná metoda je dobře použitelná i bez pomoci výpočetní techniky [3].

#### Grafické řešení:

Obdobně jako u postupné početní metody se za stejných podmínek postupně uvolňují jednotlivé styčnický, ve kterých jsou neznámé velikosti pouze dvou sil. Z tohoto důvodu je možné pro řešení styčnick vždy nakreslit silový obrazec, a tím zjistit velikosti neznámých sil. Na obrázku 2.4 lze vidět silové obrazce jednotlivých styčnicků vybrané prutové soustavy [3].

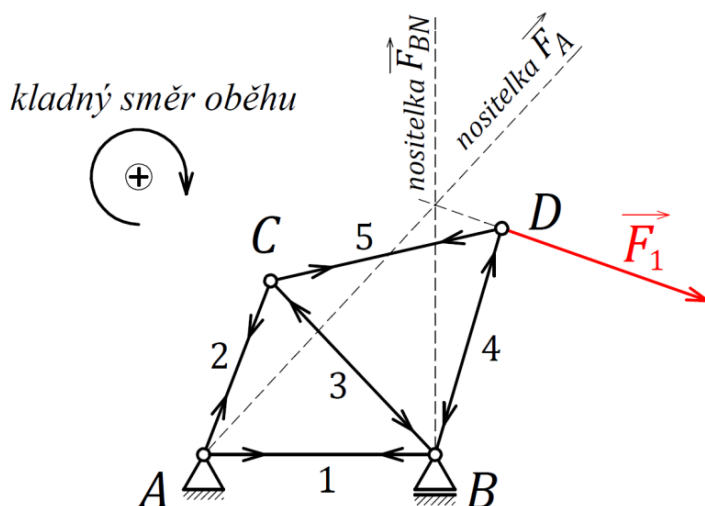


Obr. 2.4 Grafické řešení prutové soustavy postupnou styčnickovou metodou.

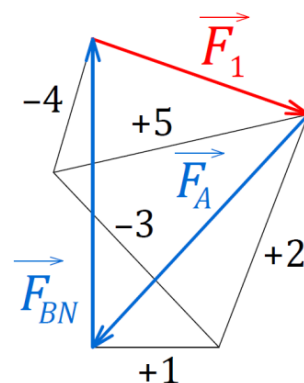
### 2.5.3. Cremonova metoda

Jedná se o grafickou metodu, ve které jsou silové obrazce jednotlivých styčnicků zakresleny do jednoho diagramu. Nakreslený diagram se nazývá Maxwellův-Cremonův diagram (krátce pouze Cremonův). Každý prut se na svých koncích stýká se dvěma styčnický, proto se jeho osová síla vyskytuje při postupné metodě ve dvou silových obrazcích. V Cremonově diagramu je zapotřebí zakreslit osovou sílu každého prutu pouze jednou. Nejprve se kreslí

obrazec vnějších sil ve vazbách a vnějších zatěžujících sil při dodržení zvoleného kladného směru oběhu, tak se získá kostra Cremonova diagramu. Dále se pak do diagramu postupně přikreslují silové obrazce jednotlivých styčníků (vybírání se vždy ten styčník, na kterém nejsou známe velikosti pouze dvou sil), opět při dodržení kladného směru oběhu. Do nákresu zadané prutové soustavy se přitom zakresluje smysl namáhání jednotlivých prutů (šipky ze styčníku ven značí tah, dovnitř tlak). V Cremonově diagramu smysl namáhání odpovídá znaménko plus (tah) nebo minus (tlak) před číslem prutu [4]. Ukázku řešení Cremonovou metodou lze vidět na obrázcích 2.5 a 2.6, jedná se o stejnou prutovou soustavu jako na obrázku 2.4.



Obr. 2.5 Šipky ze styčníku ven značí tah, dovnitř tlak.

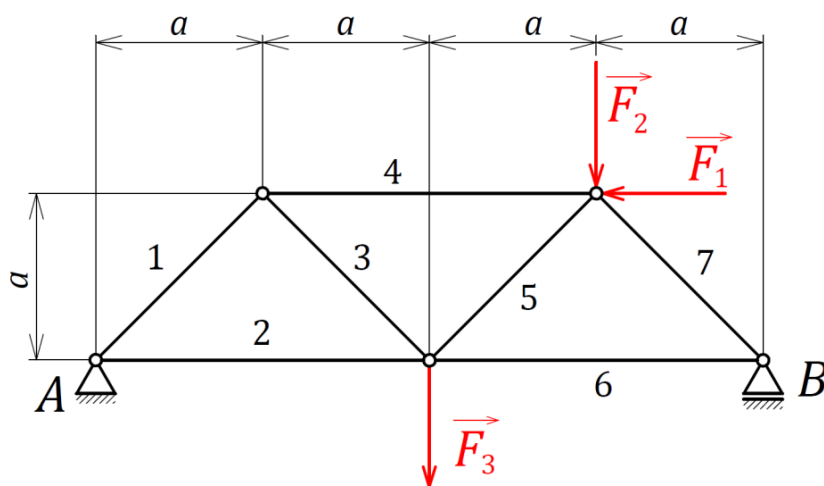


Obr. 2.6 Výsledný Cremonův diagram.

#### 2.5.4. Průsečná metoda

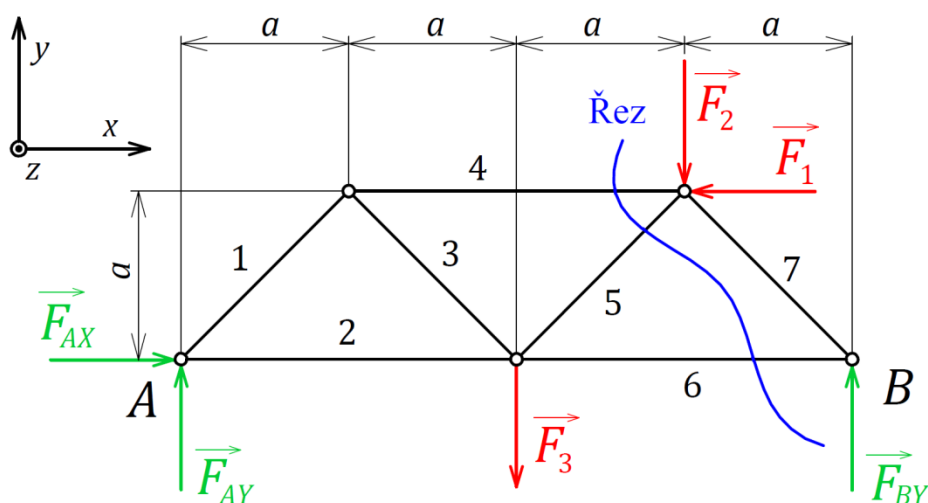
Průsečná metoda umožňuje rychle zjistit osové síly ve vhodně zvolených prutech. Prutovou soustavou se vede řez tak, aby protínal tři pruty, ve kterých se chce zjistit velikost namáhání. Osové síly v prutech se dopočtou z podmínek statické rovnováhy odříznuté části prutové soustavy [2,3].

Na vybrané prutové soustavě (Obr. 2.7) bude ukázáno, jak lze určit průsečnou metodou velikost osových sil v prutech s číslem čtyři, pět a šest.



Obr. 2.7 Prutová soustava řešená průsečnou metodou.

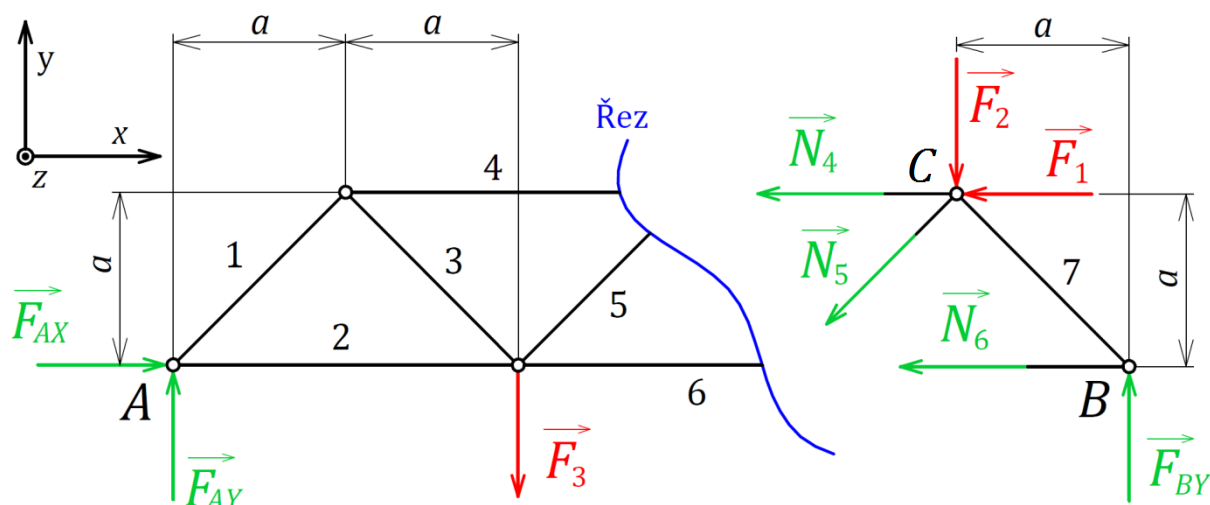
Zadanou prutovou soustavou se vede řez tak, aby přerušil zvolené pruty, viz obrázek 2.8.



Obr. 2.8 Řez vedený prutovou soustavou a uvolnění vnějších vazeb.

Řešení se provede pro oddělenou pravou část prutové soustavy. Pro výpočet bude potřeba znát velikost reakce  $F_{BY}$ , tu lze dopočítat z rovnice momentové rovnováhy k bodu A.

$$\sum M_{ZA} = 0 \rightarrow F_{BY} \cdot 4a + F_1 \cdot a - F_2 \cdot 3a - F_3 \cdot 2a = 0 \rightarrow F_{BY} = \frac{F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 2 - F_1}{4}$$



Obr. 2.9 Prutová soustava rozdělena řezem na dvě části.

Aby byla oddělená pravá část soustavy (obr. 2.9) ve statické rovnováze, musí platit:

$$\sum M_{ZC} = 0 \rightarrow F_{BY} \cdot a - N_6 \cdot a = 0 \rightarrow N_6 = F_{BY}$$

$$\sum F_Y = 0 \rightarrow F_{BY} - F_2 - N_5 \cdot \sin(45^\circ) = 0 \rightarrow N_5 = \sqrt{2} \cdot (F_{BY} - F_2)$$

$$\sum F_X = 0 \rightarrow -F_1 - N_4 - N_5 \cdot \cos(45^\circ) - N_6 = 0 \rightarrow N_4 = -F_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot N_5 - N_6$$

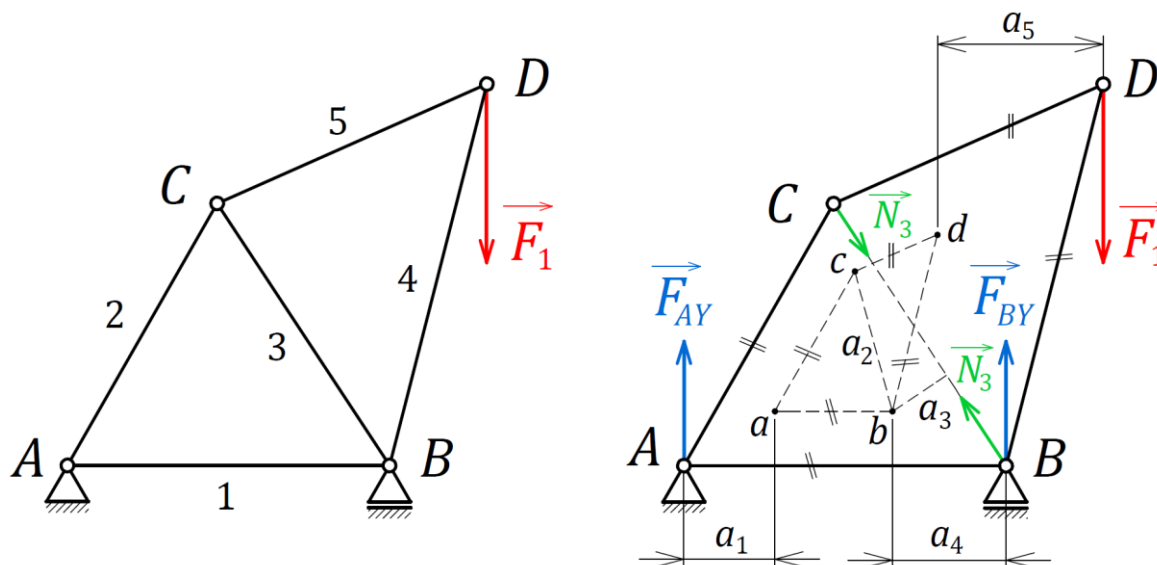


Je-li výpočet proveden početně, je často průsečná metoda nazývána Ritterova. Pokud se řešení provede graficky, přezdívá se jí metoda Culmannova, jelikož úloha vede na konstrukci Culmannovy přímky [2].

### 2.5.5. Metoda momentových součtů (Müller-Breslau)

Podmínky statické rovnováhy styčníků lze napsat v momentovém tvaru. Platí, že součet momentů od všech sil působících ve styčniku se k libovolnému bodu musí rovnat nule. Myšlenkou metody momentových součtů je sepsat pro všechny styčnické momentové podmínky k vhodným bodům tak, aby po jejich sečtení došlo k vzájemnému vyrušení neznámých, až na jednu neznámou velikost síly ve vybraném prutu. Sečtením se dostane rovnice, ze které lze tuto jednu zbylou neznámou vyjádřit pouze v závislosti na velikosti vnějších stykových a zatěžujících sil [4].

Na obrázku 2.10 platí:  $AB \parallel ab$ ,  $AC \parallel ac$ ,  $BD \parallel bd$ ,  $CD \parallel cd$ , ale neplatí  $BC \parallel bc$ . Sepsáním momentových podmínek rovnováhy styčníků prutové soustavy k bodům  $a, b, c, d$  a jejich následným sečtením se získá rovnice, ve které se vyruší momenty sil v prutech kromě momentu síly  $N_3$  [4].



Obr. 2.10 Ukázka řešeného příkladu pomocí metody Müller-Breslau [4].

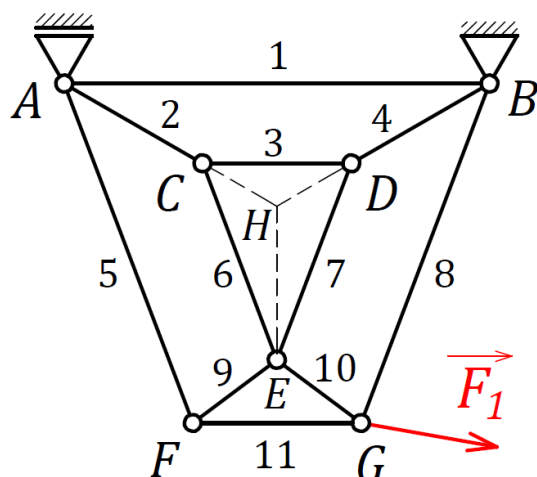
$$F_{AY} \cdot a_1 - F_{BY} \cdot a_4 + F_1 \cdot a_5 + N_3 \cdot (a_2 - a_3) = 0 \rightarrow N_3 = \frac{F_{BY} \cdot a_4 - F_{AY} \cdot a_1 - F_1 \cdot a_5}{a_2 - a_3}$$

### 2.5.6. Metoda myšlených kloubů

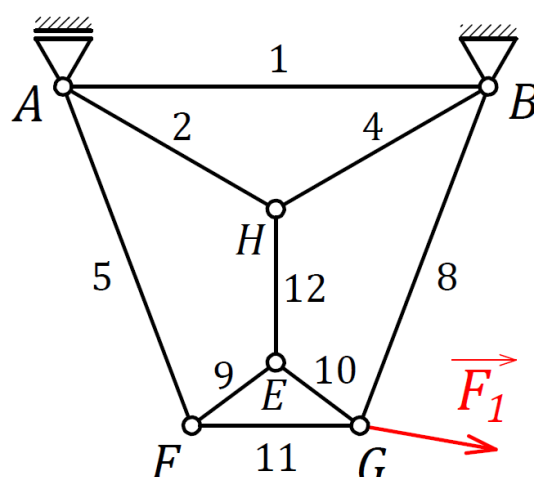
Metodou myšlených kloubů je možné přidáním styčnicku do vhodného místa získat snadněji řešitelnou podobu soustavy, ve které se převedením nezmění velikosti sil v prutech. Metoda jde použít pouze ve specifických případech [3].

Na obrázku 2.11 je prutová soustava zatížená vnější silou  $F_1$ . Protože ve styčnicích  $C, D, E$  nepůsobí žádné vnější síly, musí být výslednice osových sil prutů 2 a 4 v rovnováze s výslednicí prutů 9 a 10. Zároveň musí zmíněné výslednice ležet na spojnici  $H$  a  $E$ . Z toho plyne, že soustavu na obrázku 2.11 lze převést do tvaru prutové soustavy na obrázku 2.12. Velikosti osových sil v prutech, kromě prutů 3, 6 a 7, které byly ze soustavy odebrány, zůstanou nezměněny [3].





Obr. 2.11 Nepřevedená prutová soustava.



Obr. 2.12 Převedená prutová soustava metodou myšlených kloubů.

### 2.5.7. Metoda náhradních prutů (Hennenbergova)

Metodu náhradních prutů je vhodné použít v případě, kdy se v prutové soustavě nevyskytuje žádný dvojný styčník a nejde ji tedy řešit postupnou metodou. Princip spočívá v odebrání jednoho prutu a přidání prutu jiného do vhodnějšího místa. Musí se přitom zachovat nepohyblivost soustavy. Místo, odkud je odebrán prut, se nahradí silami směřujícími ve směru odebraného prutu, aby soustava zůstala v silové rovnováze. Velikost náhradních sil se volí libovolná, přičemž platí:

$$F_{skutecna} = k \cdot F_{zvolena}$$

Soustava je potom řešena ve dvou variantách. Zaprvé se uvažuje, že na soustavu působí pouze síly od nahrazeného prutu, jiné vnější zatěžující síly se v tomto prvním případě neuvažují. Zadruhé se naopak řeší soustava pouze se zatěžujícími vnějšími silami a síly od nahrazeného prutu se neuvažují. Pro každý prut se zjistí dvě hodnoty sil v něm působících. Pro skutečné velikosti sil v prutech potom platí:

$$N_{i,skutecna} = k \cdot N_i^I + N_i^{II}$$

V přidáném prutu musí být síla nulová (prut v soustavě ve skutečnosti neexistuje). Tento prut je místo číslem označen písmenem  $R$ . Musí platit:

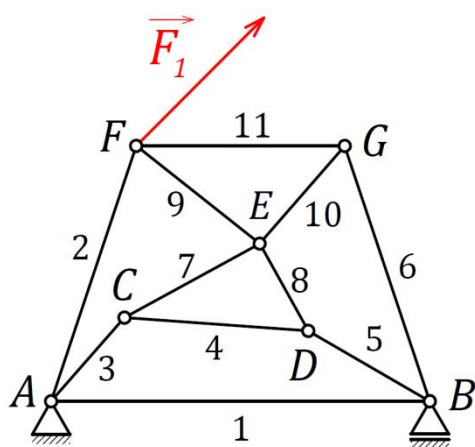
$$N_{R,skutecna} = k \cdot N_R^I + N_R^{II} = 0 \rightarrow k = -\frac{N_R^{II}}{N_R^I}$$

Pomocí konstanty  $k$  lze dopočítat skutečné velikosti osových sil ve všech prutech [3,4].

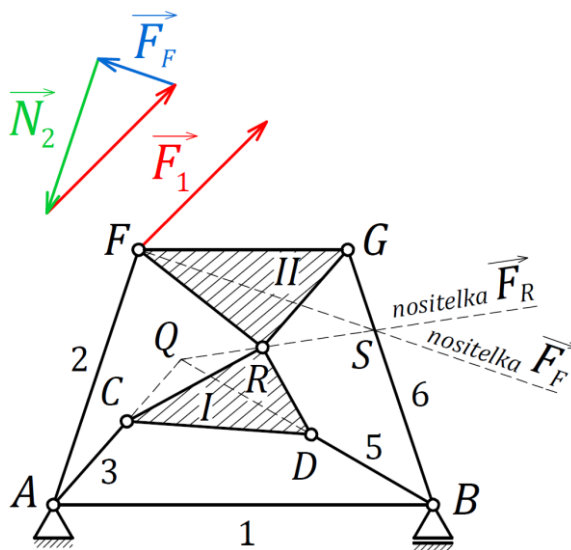
### 2.5.8. Metoda zjednodušování soustav

Jak již z názvu vyplývá, cílem metody je zjednodušit prutovou soustavu. Zjednodušení se provede nahrazením částí prutové soustavy fiktivními deskami (rovinnými tělesy), které musí být ve statické rovnováze. Osově síly v prutech přitom musí zůstat nezměněny.

Prutovou soustavu na obrázku 2.13 lze převést v soustavu na obrázku 2.14. Pruty 4, 7, 8 jsou nahrazeny tělesem *I* a pruty 9, 10, 11 tělesem *II*. Z věty o třech silách působících na těleso *I* plyne, že se musí protínat v jednom bodě, tomu odpovídá bod *Q*. Síla působící v rotační vazbě *R*, musí ležet na spojnici *Q* a *R*, viz nositelka  $\vec{F}_R$ . Síly působící na těleso *II* se protínají v bodě *S*. Nositelka  $\vec{F}_F$  musí být přímka protínající *F* a *S*, je možno sestavit silový obrazec rovnováhy pro rotační vazbu *F* [2].



Obr. 2.13 Nezjednodušená soustava [2].



Obr. 2.14 Zjednodušená soustava [2].

### 2.5.9. Metoda neurčitého měřítka

Podobně jako u metody náhradních prutů je vhodné metodu neurčitého měřítka použít v případě, kdy prutová soustava neobsahuje ani jeden dvojný styčník. Metoda využívá jedné z vlastností prutové soustavy, kterou je lineární závislost osových sil v prutech na velikostech zatěžujících sil. Zjednodušeně řečeno, pokud se zatěžující síla zvětší třikrát, musí se třikrát zvětšit i osově síly v prutech od ní vyvolané. Pro zjednodušení vysvětlení bude předpokládáno, že na prutovou soustavu působí pouze jedna vnější zatěžující síla.

Nejprve se v prutové soustavě zvolí velikost síly v jednom z prutů soustavy. Zvolit se musí takový prut, s jehož známou osovou silou je možno vyřešit celou prutovou soustavu. Pro zvolenou velikost osově síly v prutu se dopočtou velikosti ostatních sil v prutech, a také se zjistí hodnota velikosti vnější zatěžující síly, která odpovídá zvolené velikosti osově síly. Tak se vyčíslí velikosti osových sil ve všech prutech soustavy  $N_1^*, N_2^*, N_3^*, \dots, N_n^*$ , a hodnota síly  $F^*$ , hvězdička značí, že se jedná o hodnoty dopočtené ze zvolené hodnoty osově síly. Nyní lze vyčíslit poměr zadané síly *F* ku dopočtené síle  $F^*$ .

$$\frac{F}{F^*} = \kappa \rightarrow F = \kappa \cdot F^*$$

Pomocí zjištěného poměru  $\kappa$  lze dopočítat skutečné velikosti osových sil v jednotlivých prutech [2].

$$N_i = \kappa \cdot N_i^*$$

### 3 Namáhání prostým tahem a tlakem

Pruty prutové soustavy jsou zatíženy silami, které mají nositelky totožné s jejich střednicí. Jak již bylo uvedeno, jedná se o nezatížené binární členy namáhané pouze prostým tahem či tlakem. Namáhání prostým tahem nebo tlakem je namáhání přímého prismatického prutu, pokud na dané rozlišovací schopnosti [5]:

- Jsou splněny prutové předpoklady.
- Příčné průřezy se v případě tahu oddalují a zmenšují, v případě tlaku přibližují a zvětšují. Tvar příčných průřezů se však nemění.
- Normálná síla je jedinou nenulovou složkou vnitřních výsledných účinků.
- Při řešení statické rovnováhy se prvky prutů uvolňují ve výchozím nezdeformovaném stavu

#### 3.1. Přetvoření zatíženého tělesa

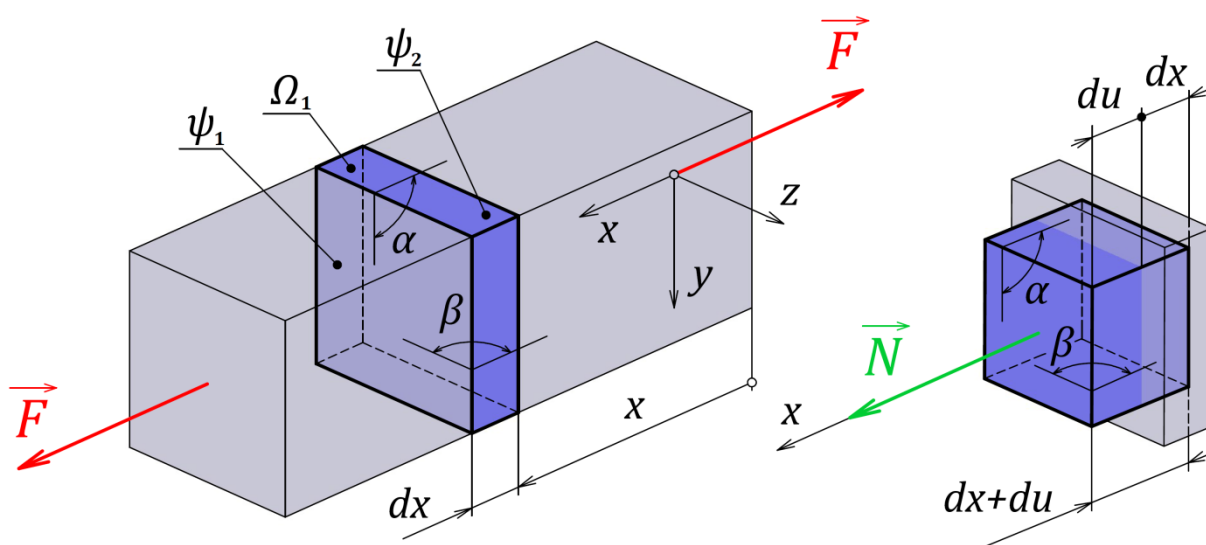
Na obrázku 3.1 je z tělesa namáhaného tahem uvolněn jednonásobně elementární prvek  $\Omega_1$  o délce  $dx$ . Délkové přetvoření  $\varepsilon_x$  ve směru střednice prutu je dáno změnou vzdálenosti příčných průřezů  $du$ . Právé úhly  $\alpha, \beta$  zůstávají pravé. Pro deformaci uvolněného prvku platí [5]:

$$\text{úhlová přetvoření:} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad (3-1)$$

$$\text{délkové přetvoření:} \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3-2)$$

$$\text{příčné přetvoření:} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu_P \cdot \varepsilon_x \quad (3-3)$$

$\varepsilon_x$  je v celém průřezu  $\psi$  rozloženo rovnoměrně, z tohoto důvodu platí:  $\varepsilon_x(y, z) = \text{konst.}$



Obr. 3.1 Uvolněný elementární prvek  $\Omega_1$  z tělesa namáhaného tahem [5].

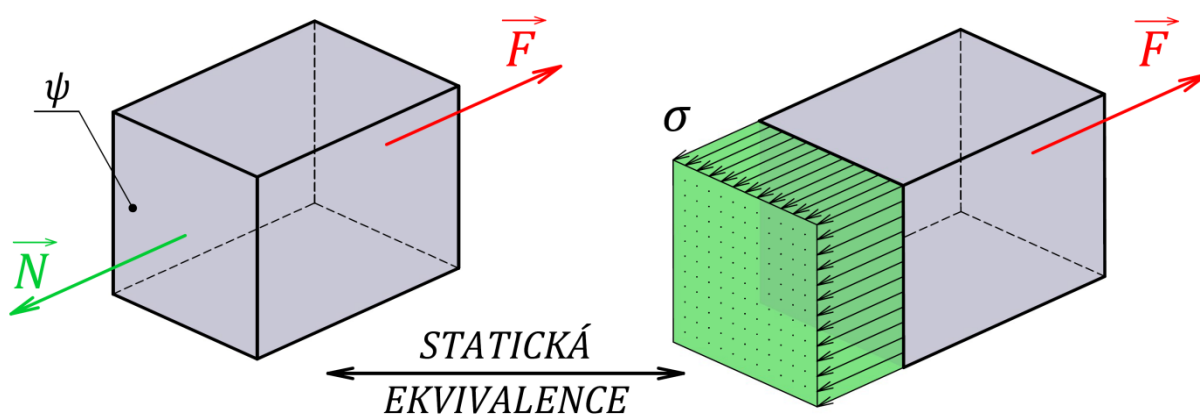
### 3.2. Napjatost tělesa

Z Hookeova zákona lze vyjádřit napětí v příčném průřezu  $\sigma$  v závislosti na délkovém přetvoření a na materiálové konstantě modulu pružnosti v tahu  $E$ .

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_x \quad (3-4)$$

V prutu vzniká tzv. jednoosá napjatost, platí-li  $\sigma > 0$  pak jednoosá napjatost tahová, pokud  $\sigma < 0$ , jednoosá napjatost tlaková [5].

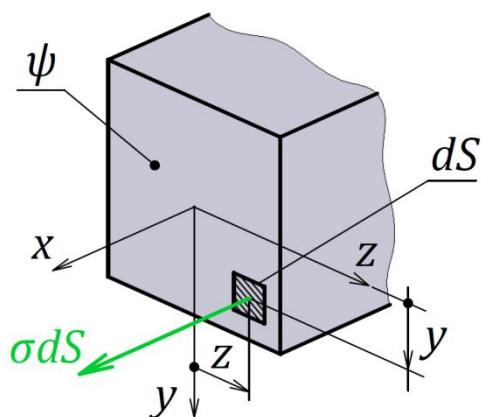
Jelikož je hodnota délkového přetvoření v celém průřezu konstantní, je průběh napětí v průřezu rovněž konstantní. Napětí je po příčném průřezu rozloženo rovnoměrně (obr. 3.2).



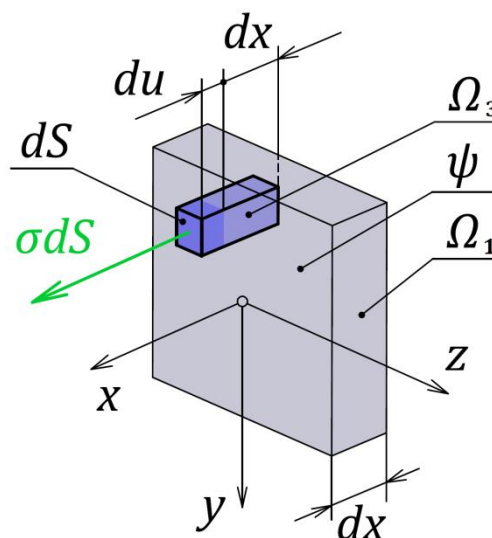
Obr. 3.2 Průběh napětí u tělesa namáhaného tahem [5].

Integrací napětí přes plochu příčného průřezu  $\psi$  (obr. 3.3) lze vyjádřit velikost napětí v závislosti na obsahu průřezu a hodnotě normální síly. Jelikož je hodnota  $\sigma$  konstantní platí:

$$N = \iint_{\psi} \sigma \cdot dS = \sigma \iint_{\psi} dS = \sigma \cdot S \rightarrow \sigma = \frac{N}{S} \quad (3-5)$$



Obr. 3.3 Elementární síla v průřezu prutu [5].



Obr. 3.4 Trojnásobně elementární prvek  $\Omega_3$  [5].

### 3.3. Energie napjatosti

Na obrázku 3.4 je z tělesa namáhaného tahem uvolněn trojnásobně elementární prvek  $\Omega_3$ , který je zatížen vnitřní elementární silou o velikosti  $dF = \sigma dS$ . Ta při prodloužení prvku o deformační posuv  $du$  vykoná elementární deformační práci  $dA_{\Omega_3}$ .

$$dA_{\Omega_3} = \frac{1}{2} \cdot du \cdot \sigma \cdot dS \quad (3-6)$$

Deformační práce  $dA$  se přemění na pružnou energii napjatosti  $dW$ , platí  $dA = dW$ . Dosazením do vztahu (3-6) ze (3-2)  $du = \varepsilon_x dx$  a následně ze (3-4)  $\varepsilon_x = \sigma/E$  lze odvodit:

$$dA_{\Omega_3} = dW_{\Omega_3} = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dS \cdot dx \quad (3-7)$$

Tento vztah vyjadřuje naakumulovanou energii napjatosti v prvku  $\Omega_3$ . Integrací přes plochu příčného průřezu  $\psi$  a dosazením za napětí ze vztahu (3-5)  $\sigma = N/S$  lze vyjádřit energii akumulovanou v jednonásobně elementárním prvku  $\Omega_1$ .

$$dW_{\Omega_1} = \iint_{\psi} \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \cdot dx \cdot dS = \iint_{\psi} \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S^2} \cdot dx \cdot dS = \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot dx \quad (3-8)$$

V prvku s konečnou délkou  $l$  se akumuluje energie napjatosti o velikosti [5]:

$$W = \int_0^l \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot dx \quad (3-9)$$

### 3.4. Castiglianova věta

Jeli známa energie napjatosti lineárně elastického tělesa jako funkce zatěžující síly  $F_i$ , pak posuv jejího působíště  $u_i$  po nositelce  $F_i$  je roven parciální derivaci energie napjatosti tělesa podle této síly [7, 8].

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} \quad (3-10)$$

Obdobně pro natočení tělesa  $\varphi_i$  v působíšti silové dvojice  $M_i$  platí, že je rovno parciální derivaci energie napjatosti podle silové dvojice  $M_i$ .

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad (3-11)$$

V případě kdy deformace okolních těles nejsou zanedbatelné, musí se do energie napjatosti zahrnout celá soustava těles. Castiglianova věta je z praktického hlediska nejdůležitější větou lineární pružnosti [7].

### 3.5. Mezní stavy

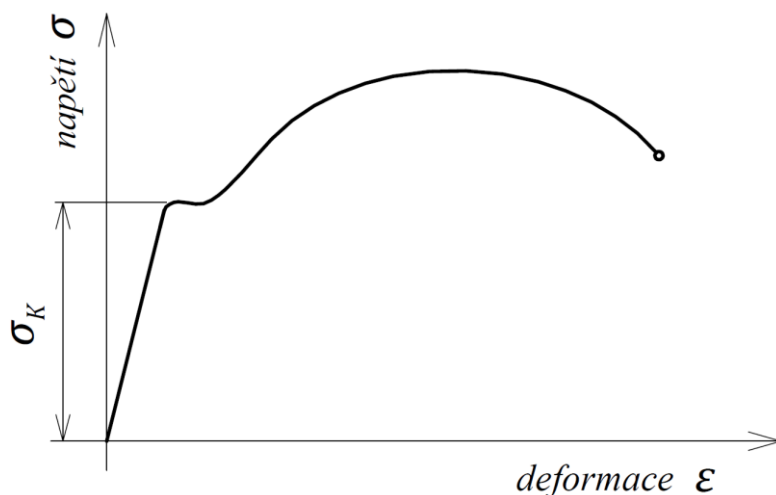
Mezními stavy se nazývají situace kdy deformace nebo porušení tělesa přesáhne nepřipustnou hranici [5]. Při dosažení mezního stavu může dojít k zničení zařízení nebo k újmě na zdraví, je tedy potřeba navrhovat strojní součásti s bezpečností, aby se mezním stavům předcházelo. Mezní stav je zpravidla vyvolán překročením určité hraniční hodnoty napětí.

Obsahem této práce je vymezení dvou mezních stavů charakteristických pro prutové soustavy. Jedná se o mezní stav pružnosti a mezní stav vzpěrné stability.

#### 3.5.1. Mezní stav pružnosti (MSP)

Pro definování mezního stavu pružnosti je vhodné si představit zatížené těleso, které se vlivem namáhání deformuje. Při odtížení tělesa mohou nastat dvě situace. V prvním případě je zbylá deformace tělesa velmi malá, prakticky nezjistitelná. Jelikož se po odtížení vrátí těleso do původního tvaru, mluví se o tzv. vratné deformaci, častěji se však označuje jako deformace pružná (elastická). V druhém případě se po odlehčení tělesa z části vrátí do původního stavu, ale zůstane v něm nevratná deformace, běžné nazývána jako plastická deformace [5].

Mezní stav pružnosti je stav, při kterém vznikají v tělese nevratné plastické deformace. K jeho překročení dochází, pokud se v tělese dosáhne určité hodnoty napětí označované jako mez kluzu. Jedná se o materiálovou charakteristiku zjišťovanou z mechanických materiálových zkoušek. Zobrazení hodnoty meze kluzu  $\sigma_K$  lze vidět na obrázku 3.5 v diagramu tahové zkoušky. Pro většinu materiálů má hodnota meze kluzu při tahu i tlaku stejnou hodnotu [5].



**Obr. 3.5** Pracovní diagram tahové zkoušky materiálu s výraznou mezí kluzu.

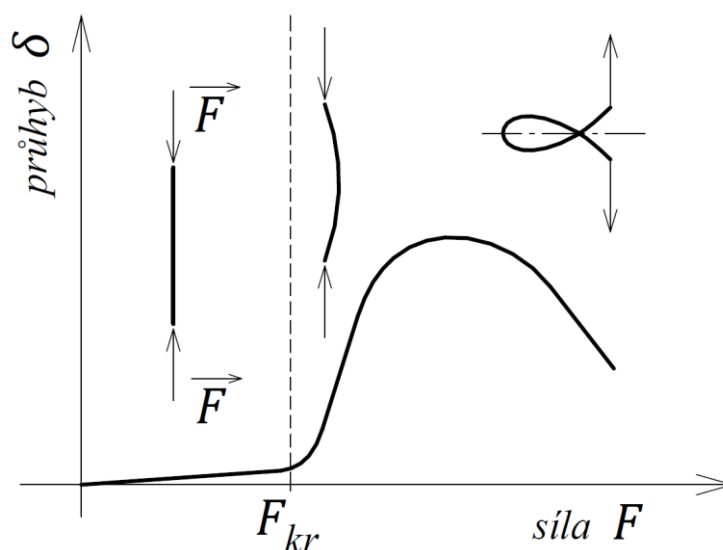
Kontrola vůči meznímu stavu pružnosti se provádí porovnáním skutečné velikosti napětí s mezí kluzu materiálu součásti. Musí platit, že hodnota napětí v součásti je menší než mez kluzu. Zavedením součinitele bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti  $k_{MSP}$ , který vyjadřuje kolikrát je skutečné napětí v součásti menší než mez kluzu, se dostane vztah:

$$\sigma_K = k_{MSP} \cdot \sigma \rightarrow k_{MSP} = \frac{\sigma_K}{\sigma} \quad (3-12)$$

### 3.5.2. Mezní stav vzpěrné stability (MSVS)

Známost skutečností je, že při stlačování tenké tyče dojde v určitém okamžiku k jejímu prohnutí, tyč se začne ohýbat. Mezní stav vzpěrné stability je definován jako stav, při jehož dosažení se mění charakter podstatné deformace [5]. Dochází k němu u přímých štíhlých tyčí, které jsou zatíženy na jejich koncích dvojicí stlačujících sil. Nejedná se o náhodný jev, stlačované pruty prutové soustavy, u kterých by mohlo dojít ke ztrátě vzpěrné stability, je nutné vyšetřit vůči vzniku tohoto mezního stavu.

Pokud se při stlačování reálného štíhlého prutu postupně narůstající silou zaznamenává velikost průhybu, dostane se závislost znázorněná na obrázku 3.6. Ke ztrátě vzpěrné stability dochází náhle při překročení jisté síly  $F_{kr}$ .



Obr. 3.6 Závislost průhybu na velikosti zatěžující síly [5]

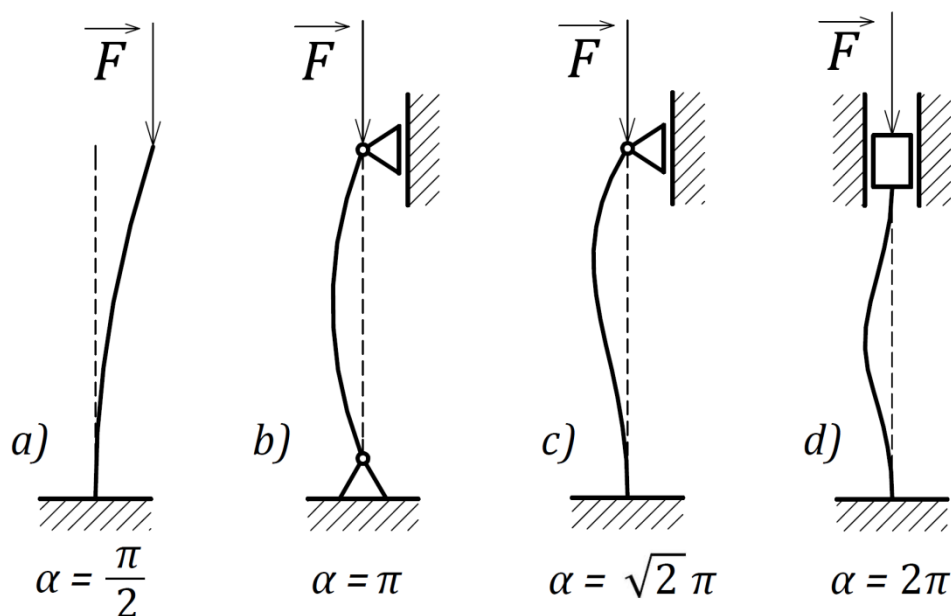
Pro posuzování vzpěrné stability stlačovaných prutů bylo odvozeno tzv. Eulerovo řešení, dle kterého lze vypočítat velikost kritické vzpěrné síly  $F_V$ , viz vztah (3–13). Při stlačování ideálního prutu silou menší než  $F_V$  se prut pouze stlačuje. Pokud je zatěžující síla větší než  $F_V$ , prut se začíná ohýbat, případně se může dále jenom stlačovat, pak je ale v nestabilním stavu, kdy jakýkoliv impuls vede k jeho prohnutí. Hodnota kritické síly  $F_V$  je závislá na geometrii, materiálu a uložení prutu [5].

$$F_V = \alpha^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{l^2} \quad (3-13)$$

Koeficient  $\alpha$  je součinitel závisící na uložení prutu (viz obr. 3.7),  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $J_{min}$  je minimální osový kvadratický moment průřezu a  $l$  je délka prutu.

Bezpečnost k meznímu stavu vzpěrné stability  $k_{MSVS}$  se spočte z kritické síly  $F_V$  a skutečné velikosti normální osové síly  $N$ . Platí:

$$k_{MSVS} = \frac{F_V}{N} \quad (3-14)$$



**Obr. 3.7** Určení koeficientu  $\alpha$  pro čtyři základní případy uložení [5].

a) vetknutí – volný konec   b) kloub – kloub   c) vetknutí – kloub   d) vetknutí – vetknutí

Vydělením vztahu (3–13) obsahem průřezu prutu  $S$ , lze obdržet vztah pro velikost kritického napětí  $\sigma_V$ , při jehož dosažení dojde v prutu k meznímu stavu vzpěrné stability.

$$\sigma_V = \frac{F_V}{S} = \alpha^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{l^2 \cdot S} \quad (3-15)$$

Zavedením pojmu štíhlost prutu  $\lambda$ , viz vztah (3–17), a jeho následným dosazením do vztahu (3–15) lze vyjádřit kritické napětí  $\sigma_V$  v závislosti na  $\lambda$ .

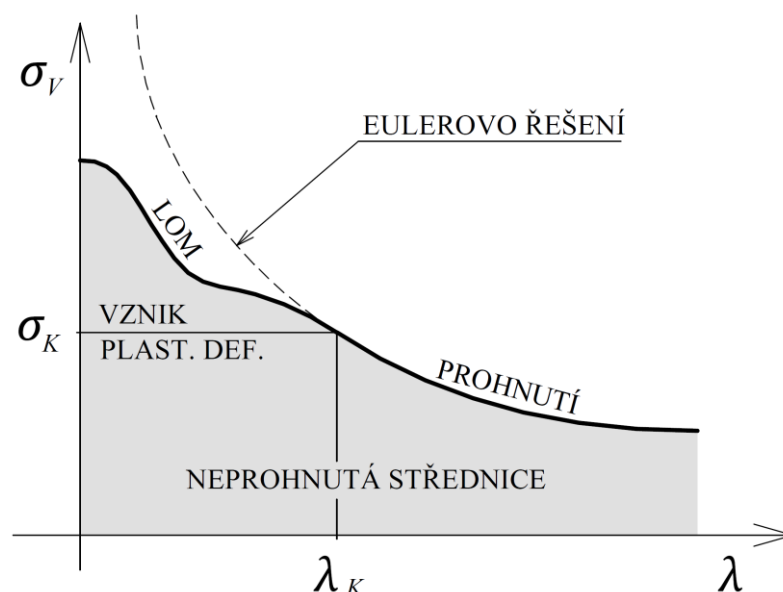
$$\sigma_V = \alpha^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2} \quad (3-16)$$

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{\frac{J_{min}}{S}}} \quad (3-17)$$

U málo štíhlých prutů může nastat situace, kdy  $\sigma_V$  je větší než mez kluzu materiálu  $\sigma_K$ . Dosazením do vztahu (3–16) za  $\sigma_V$  mez kluzu materiálu prutu  $\sigma_K$ , lze zjistit velikost hodnoty mezní štíhlosti  $\lambda_K$ , která odpovídá hodnotě štíhlosti, při které nastane mezní stav pružnosti a mezní stav vzpěrné stability v prutu při stejné velikosti napětí. Mezní štíhlost  $\lambda_K$  je dána materiálem a způsobem uložení prutu. Závislost kritického napětí  $\sigma_V$  na štíhlosti prutu  $\lambda$  lze vidět na obrázku 3.8.

$$\sigma_K = \alpha^2 \cdot \frac{E}{\lambda_K^2} \quad \rightarrow \quad \lambda_K = \alpha \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_K}} \quad (3-18)$$





**Obr. 3.8** Závislost kritického napětí  $\sigma_V$  na štíhlosti prutu  $\lambda$  [5].

Pro pruty se štíhlostí  $\lambda$  menší než  $\lambda_K$ , lze předpokládat, že dříve než mezní stav vzpěrné stability nastane mezní stav pružnosti. Pokud tedy  $\lambda < \lambda_K$  dochází k meznímu stavu vzpěrné stability až v okamžiku, kdy už v prutu vznikly nevratné plastické deformace. Eulerovo řešení plastické deformace neuvažuje, vztah (3–13) je tedy omezen svou platností pouze na interval  $\lambda \geq \lambda_K$ . V případě kdy  $\lambda < \lambda_K$  je velikost kritické síly  $F_V$  menší než udává vztah (3–13), ale větší než hodnota síly odpovídající dosažení mezního stavu pružnosti [5].

### 3.6. Návrh průřezů

Při navrhování rozměrů průřezů prutu je výchozí hodnotou velikost osově síly  $N$ . Dosazením ze vztahu (3–5)  $\sigma = N/S$  do vztahu (3–12). Následnou úpravou lze vyjádřit velikost plochy průřezu v závislosti na osově síle a zvoleném součiniteli bezpečnosti. Z rovnice pro plochu průřezu je dále potřeba vyjádřit navrhovaný rozměr.

$$k_{MSP} = \frac{\sigma_K}{\sigma} \rightarrow k_{MSP} = \sigma_K \cdot \frac{S}{N} \rightarrow S = \frac{k_{MSP} \cdot N}{\sigma_K} \quad (3-20)$$

Obdobně při navrhování průřezu prutu k meznímu stavu vzpěrné stability lze z rovnic (3–13) a (3–14) vyjádřit velikost minimálního osověho kvadratického momentu průřezu  $J_{min}$ , ze kterého se dále vyjádří navrhovaný rozměr.

$$k_{MSVS} = \frac{F_V}{N} \rightarrow k_{MSVS} = \alpha^2 \cdot \frac{E \cdot J_{min}}{l^2 \cdot N} \rightarrow J_{min} = \frac{k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N}{\alpha^2 \cdot E} \quad (3-21)$$

*Pozn.: Při navrhování průřezu vůči meznímu stavu vzpěrné stability se předpokládá  $\lambda \geq \lambda_K$ , v případě kdy  $\lambda < \lambda_K$  je u navrženého prutu skutečná hodnota součinitele  $k_{MSVS}$  nižší než navrhovaná.*



## 4 Deformační a napět'ová analýza zvolené prutové soustavy

Cílem praktické části bakalářské práce je předvést analytický výpočet zvolené prutové soustavy a následně ověřit analytické výsledky pomocí numerického řešení.

Pro výpočet byla vybrána rovinná prutová soustava ve tvaru stožáru elektrického napětí. K řešení bude použita obecná styčnicková metoda a bude při něm zanedbán vliv tíhových sil od jednotlivých prutů. Nejdříve budou vypočteny osově síly v prutech. Ty se vypočtou pro různé varianty, ze kterých bude vybrána jedna pro návrh průřezů prutů. Pruty budou vyrobeny z trubek s průřezem ve tvaru mezikruží, rozměry se řídí podle normy EN 10220 a jejich materiál je nelegovaná jakostní konstrukční ocel S235JR (11 375).

$$\sigma_K = 235 \text{ MPa}, E = 210\,000 \text{ MPa}$$

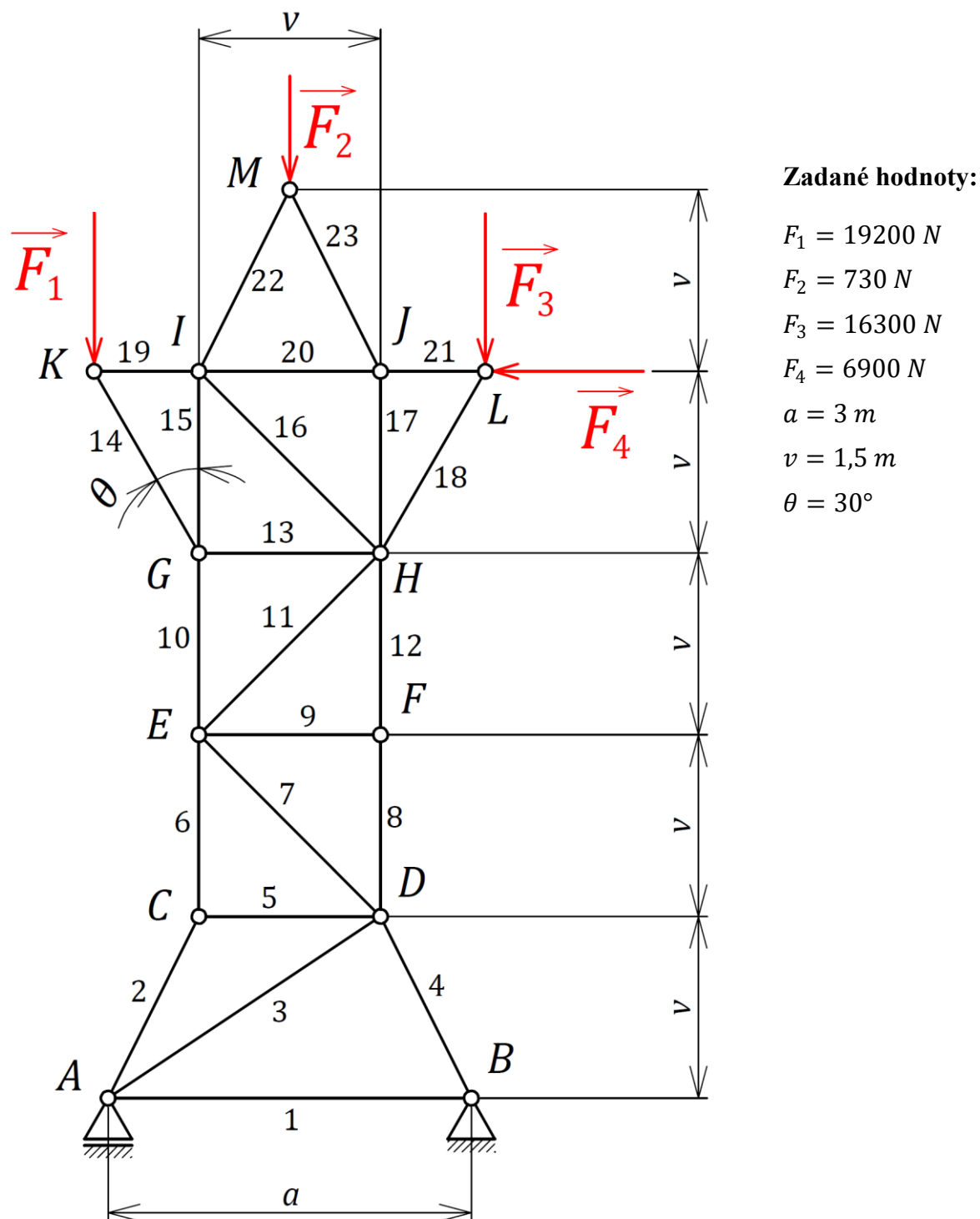
Rozměry průřezů prutů budou navrhnutы vzhledem k meznímu stavu pružnosti a k meznímu stavu vzpěrné stability. Požadavkem je, aby skutečné hodnoty součinitelů bezpečnosti k zvoleným mezním stavům splňovaly podmínku:

$$k_{MSP} \geq 3, k_{MSVS} \geq 3$$

Pro zvolené průřezy prutů bude dále vypočítána deformace soustavy ve vybraných styčnicích. V poslední části se provede numerický výpočet soustavy s navrhnutými průřezy prutů a výsledky se porovnají s analytickým řešením.

#### 4.1. Výpočet osových sil v prutech první varianty

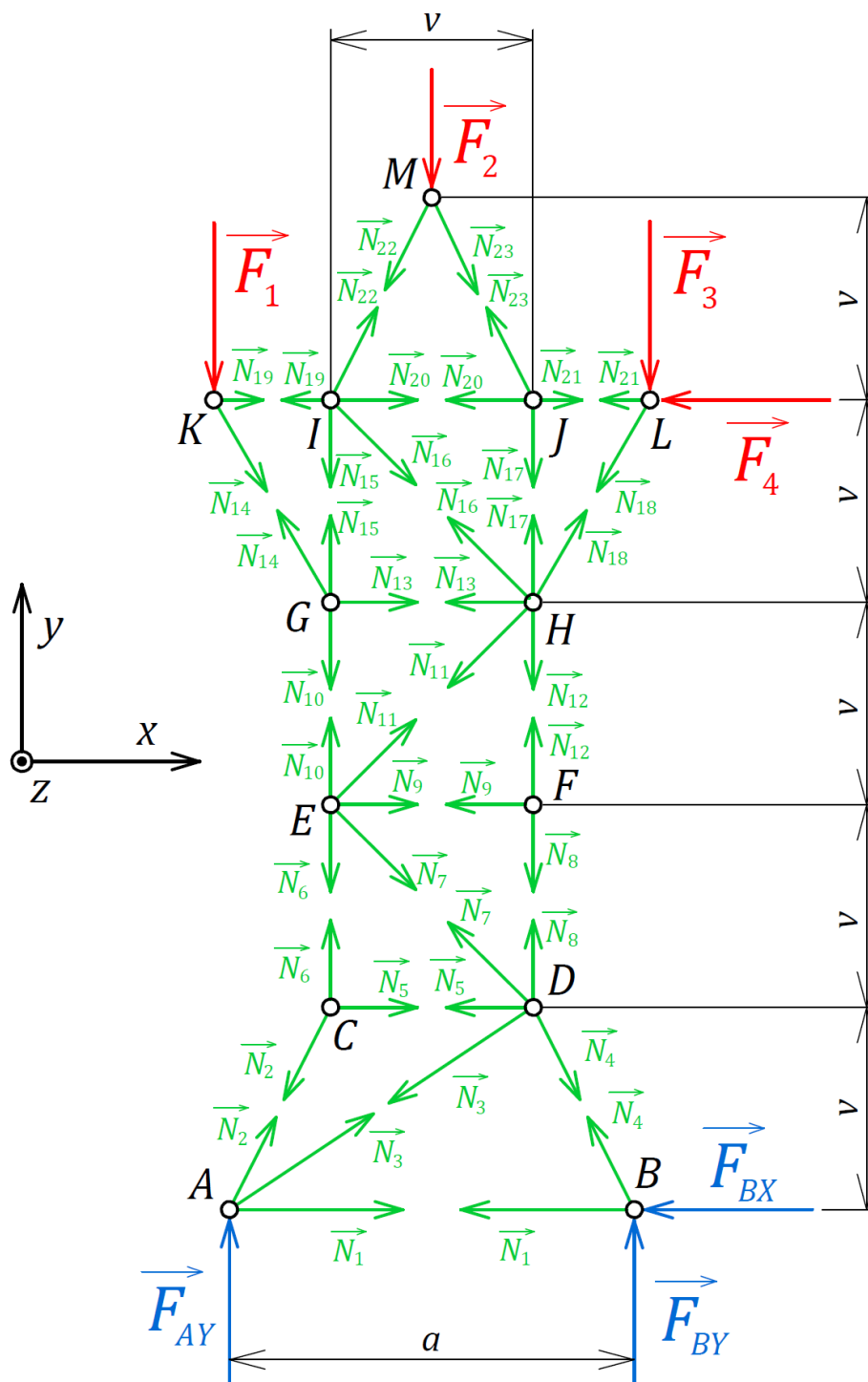
Nejdříve bude proveden výpočet osových sil pro zvolenou prutovou soustavu. Cílem je zjistit, ve kterých prutech působí největší osově síly, což bude sloužit jako výchozí informace pro konstrukční úpravy. Zadaná prutová soustava, její rozměry a velikosti zatěžujících sil jsou uvedeny na obrázku 4.1. Výpočet délek jednotlivých prutů a neznámých úhlů mezi nimi lze vidět v příloze A.



Obr. 4.1 Zadaná prutová soustava. Varianta první.

### 4.1.1. Úplné uvolnění

Pro úplné uvolnění se z prutové soustavy uvolní všechny styčníky. Prutová soustava je k zemi upevněna pomocí styčníků  $A$  a  $B$ . Obecná podpora ve styčníku  $A$  je nahrazena silou  $F_{AY}$  a rotační vazba ve styčníku  $B$  je nahrazena silami  $F_{BX}$  a  $F_{BY}$ . Vnější zatěžující síly působí ve styčnicích  $K$ ,  $L$  a  $M$ . Jednotlivé pruty se nahradí osovými silami  $N_1$  až  $N_{23}$ . Zvolení souřadného systému a úplné uvolnění je na obrázku 4.2.



Obr. 4.2 Úplné uvolnění první varianty.

#### 4.1.2. Posouzení statické určitosti soustavy

##### Vnější statická určitost:

Vnější statická určitost se určí dosazením do vztahu (2–1). Počet neznámých parametrů vnějších stykových sil se rovná počtu použitelných podmínek statické rovnováhy.

$$s_{ext} = \mu - v = 3 - 3 = 0$$

##### Vnitřní statická určitost:

Aby byla soustava vnitřně staticky určitá, musí být splněna nutná podmínka vnitřní statické určitosti, viz vztah (2–2). Počet prutů  $p = 23$  a počet styčníků  $k = 13$ .

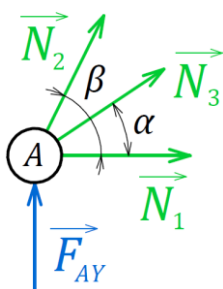
$$p = 2 \cdot k - 3$$

$$23 = 2 \cdot 13 - 3$$

$$23 = 23$$

Podmínky vnější a vnitřní statické určitosti jsou splněny. **Soustava je vnějškově i vnitřně, a tedy i celkově, staticky určitá.**

#### 4.1.3. Uvolnění styčníků a sestavení podmínek statické rovnováhy

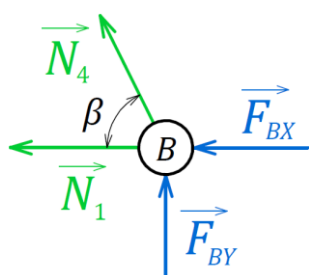


Obr. 4.3 Styčník A.

##### Styčník A:

$$\sum F_x = 0: N_1 + N_2 \cdot \cos \beta + N_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_2 \cdot \sin \beta + N_3 \cdot \sin \alpha + F_{AY} = 0$$

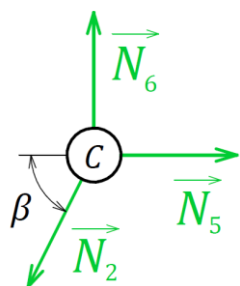


Obr. 4.4 Styčník B.

##### Styčník B:

$$\sum F_x = 0: -N_1 - N_4 \cdot \cos \beta - F_{BX} = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_4 \cdot \sin \beta + F_{BY} = 0$$

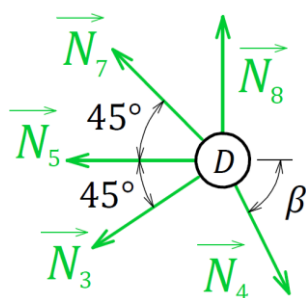


Obr. 4.5 Styčník C.

##### Styčník C:

$$\sum F_x = 0: N_5 - N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_6 - N_2 \cdot \sin \beta = 0$$

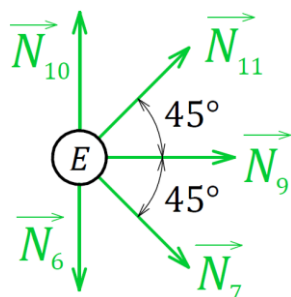


Obr. 4.6 Styčník D.

**Styčník D:**

$$\sum F_x = 0: N_4 \cdot \cos \beta - N_3 \cdot \cos \alpha - N_5 - N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_7 \cdot \sin 45^\circ + N_8 - N_3 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \beta = 0$$

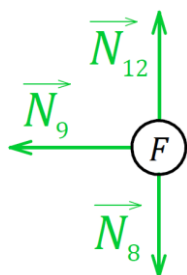


Obr. 4.7 Styčník E.

**Styčník E:**

$$\sum F_x = 0: N_7 \cdot \cos 45^\circ + N_9 + N_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{10} + N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_6 - N_7 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

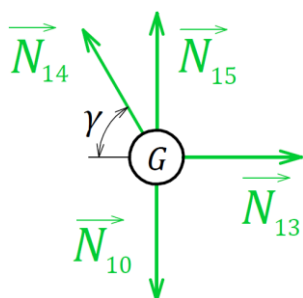


Obr. 4.8 Styčník F.

**Styčník F:**

$$\sum F_x = 0: -N_9 = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{12} - N_8 = 0$$

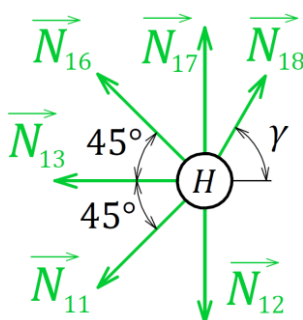


Obr. 4.9 Styčník G.

**Styčník G:**

$$\sum F_x = 0: N_{13} - N_{14} \cdot \cos \gamma = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{14} \cdot \sin \gamma + N_{15} - N_{10} = 0$$

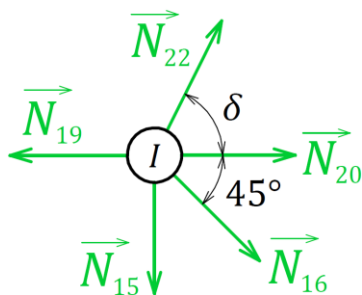


Obr. 4.10 Styčník H.

**Styčník H:**

$$\sum F_x = 0: N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{11} \cdot \cos 45^\circ - N_{13} - N_{16} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{16} \cdot \sin 45^\circ + N_{17} + N_{18} \cdot \sin \gamma - N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_{12} = 0$$

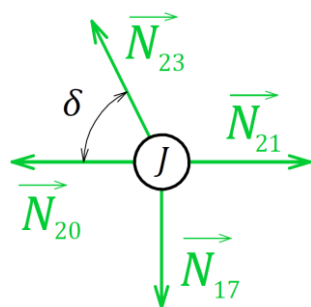


Obr. 4.11 Styčnick I.

**Styčnick I:**

$$\sum F_x = 0: N_{16} \cdot \cos 45^\circ + N_{20} + N_{22} \cdot \cos \delta - N_{19} = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{22} \cdot \sin \delta - N_{15} - N_{16} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

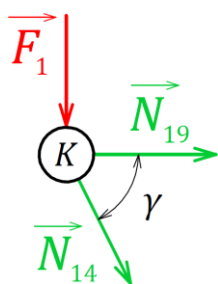


Obr. 4.12 Styčnick J.

**Styčnick J:**

$$\sum F_x = 0: N_{21} - N_{20} - N_{23} \cdot \cos \delta = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{23} \cdot \sin \delta - N_{17} = 0$$

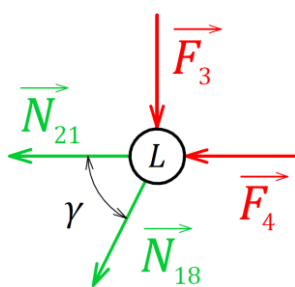


Obr. 4.13 Styčnick K.

**Styčnick K:**

$$\sum F_x = 0: N_{14} \cdot \cos \gamma + N_{19} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -N_{14} \cdot \sin \gamma - F_1 = 0$$

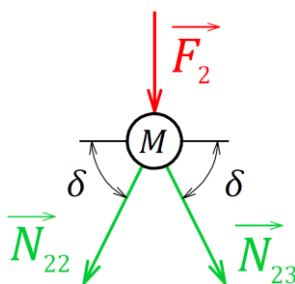


Obr. 4.14 Styčnick L.

**Styčnick L:**

$$\sum F_x = 0: -N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{21} - F_4 = 0$$

$$\sum F_y = 0: -N_{18} \cdot \sin \gamma - F_3 = 0$$



Obr. 4.15 Styčnick M.

**Styčnick M:**

$$\sum F_x = 0: N_{23} \cdot \cos \delta - N_{22} \cdot \cos \delta = 0$$

$$\sum F_y = 0: -N_{22} \cdot \sin \delta - N_{23} \cdot \sin \delta - F_2 = 0$$

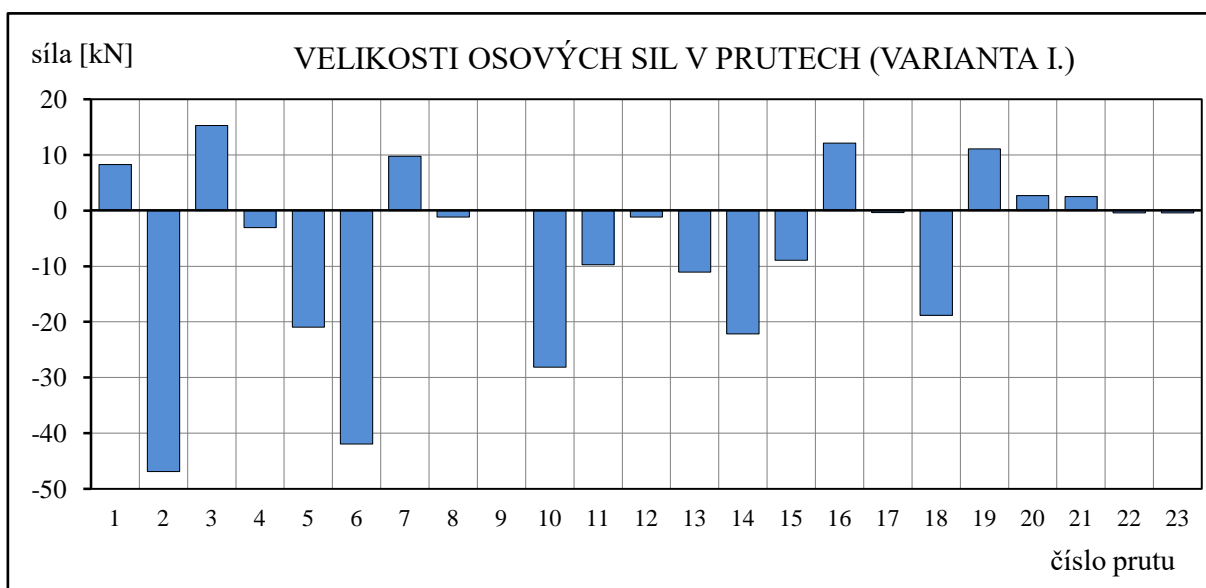


#### 4.1.4. Výsledky

Z podmínek statické rovnováhy uvolněných styčníků, viz obrázky 4.3 až 4.15, se sepsala soustava dvaceti šesti rovnic o dvaceti šesti neznámých parametrech (samostatnou soustavu rovnic s množinou neznámých parametrů lze najít v příloze B. Neznámým parametrům odpovídají velikosti osových sil v prutech a síly ve vnějších stykových vazbách. Soustava rovnic byla vyřešena pomocí naprogramovaného skriptu v softwaru MATLAB, viz příložené CD. Výsledné hodnoty osových sil v prutech jsou uvedeny v tabulce 4.1 a znázorněny v grafu na obrázku 4.16. Výsledky byly ověřeny pomocí rovnic vnější silové rovnováhy ve svislém a horizontálním směru, dále pak pomocí momentové rovnice rovnováhy k bodu uprostřed styčnicku  $G$ .

**Tab. 4.1** Velikosti osových sil v prutech pro první variantu (minus značí namáhání tlakem).

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
osová síla [kN]	8,28	-46,89	15,26	-3,08	-20,97	-41,94	9,76	-1,19
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
osová síla [kN]	0,00	-28,14	-9,76	-1,19	-11,09	-22,17	-8,94	12,13
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
osová síla [kN]	-0,37	-18,82	11,09	2,69	2,51	-0,41	-0,41	–

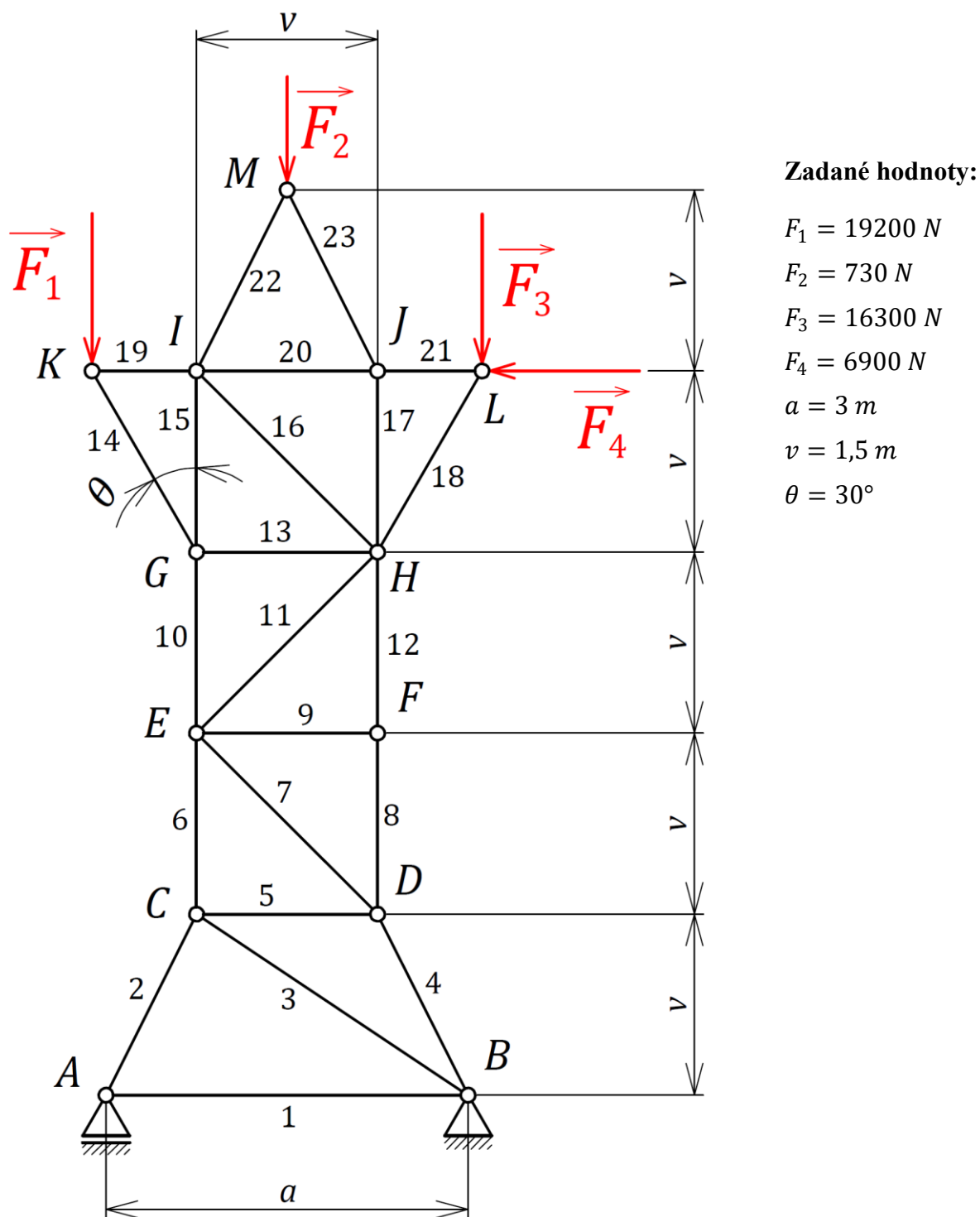


**Obr. 4.16** Graf velikostí osových sil v prutech pro první variantu.

Z výsledných hodnot osových sil lze vidět, že nejvíce namáhán je prut 2, který je zatížen tlakovou osovou silou o velikosti  $N_2 = -46,89 \text{ kN}$ . V prutu 6 působí druhá největší osová síla o velikosti  $N_6 = -41,94 \text{ kN}$ .

## 4.2. Výpočet osových sil v prutech druhé varianty

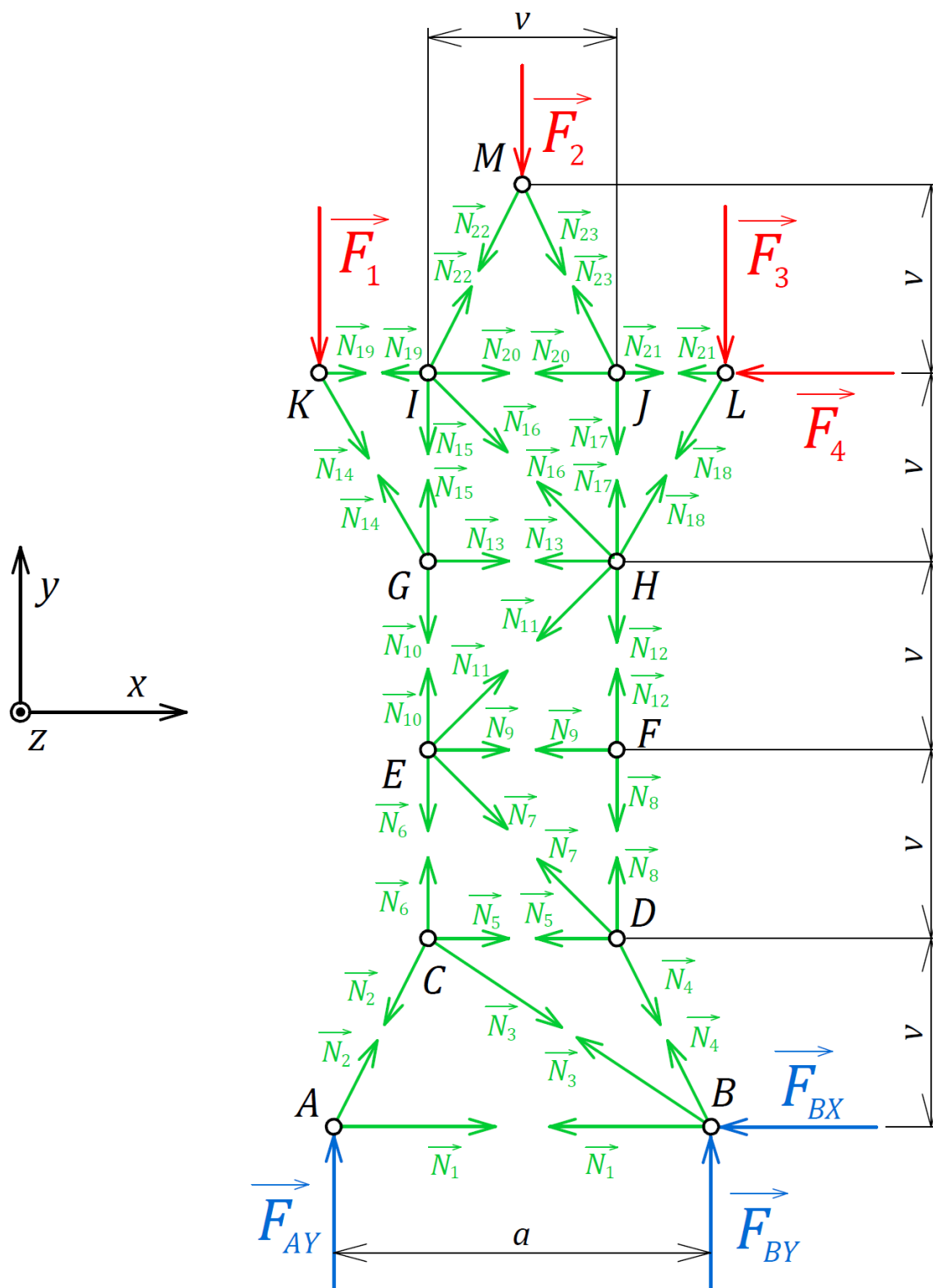
Cílem druhé varianty je snížit velikost osově síly působící v prutu 2. Konstrukční úprava provedená za tímto účelem spočívá ve změně umístění prutu 3. V předchozí variantě prut 3 spojoval styčníky  $A$  a  $D$ , nyní bude tento prut spojoval styčníky  $B$  a  $C$ . Upravenou prutovou soustavu lze vidět na obrázku 4.17. V obrázku jsou také uvedeny zadané hodnoty, ty se však oproti minulé variantě nijak nezměnily.



Obr. 4.17 Prutová soustava. Varianta druhá.

### 4.2.1. Úplné uvolnění

Postup úplného uvolnění druhé varianty je obdobný jako u varianty první. Jediná změna nastala u prutu 3 v dolní části prutové soustavy. Vnější vazby ve styčnicích A a B se uvolní stejně jako ve variantě první. Úplné uvolnění druhé varianty lze vidět na obrázku 4.18.



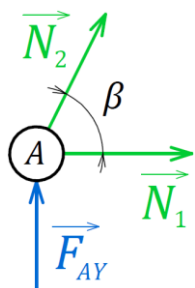
Obr. 4.18 Úplné uvolnění druhé varianty.

### 4.2.2. Posouzení statické určitosti

Způsob vnějšího uložení prutové soustavy se vůči první variantě nijak nezměnil. Počet styčníků a počet prutů je s první variantou rovněž totožný. Druhá varianta prutové soustavy musí tedy být **vnějškově i vnitřně staticky určitá**.

### 4.2.3. Uvolnění styčníků a sestavení podmínek statické rovnováhy

Ve styčnicích  $E, F, G, H, I, J, K, L, M$  nenastala žádná změna, proto zde jejich uvolnění nebude znovu uvedeno. Uvolněné styčnický  $A$  až  $D$ , které nejsou shodné s první variantou, lze vidět na obrázcích 4.19 až 4.22.

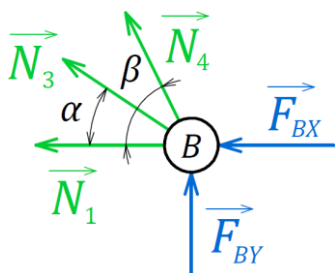


Obr. 4.19 Styčnick A (II).

**Styčnick A:**

$$\sum F_x = 0: N_1 + N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_2 \cdot \sin \beta + F_{AY} = 0$$

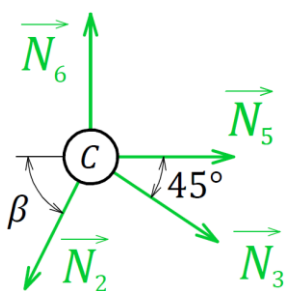


Obr. 4.20 Styčnick B (II).

**Styčnick B:**

$$\sum F_x = 0: -N_1 - N_3 \cdot \cos \alpha - N_4 \cdot \cos \beta - F_{BX} = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \beta + F_{BY} = 0$$

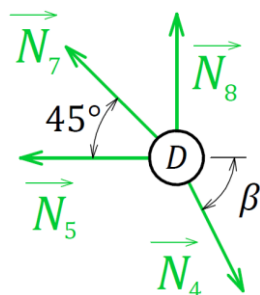


Obr. 4.21 Styčnick C (II).

**Styčnick C:**

$$\sum F_x = 0: N_3 \cdot \cos \alpha + N_5 - N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_6 - N_2 \cdot \sin \beta - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$$



Obr. 4.22 Styčnick D (II).

**Styčnick D:**

$$\sum F_x = 0: N_4 \cdot \cos \beta - N_5 - N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

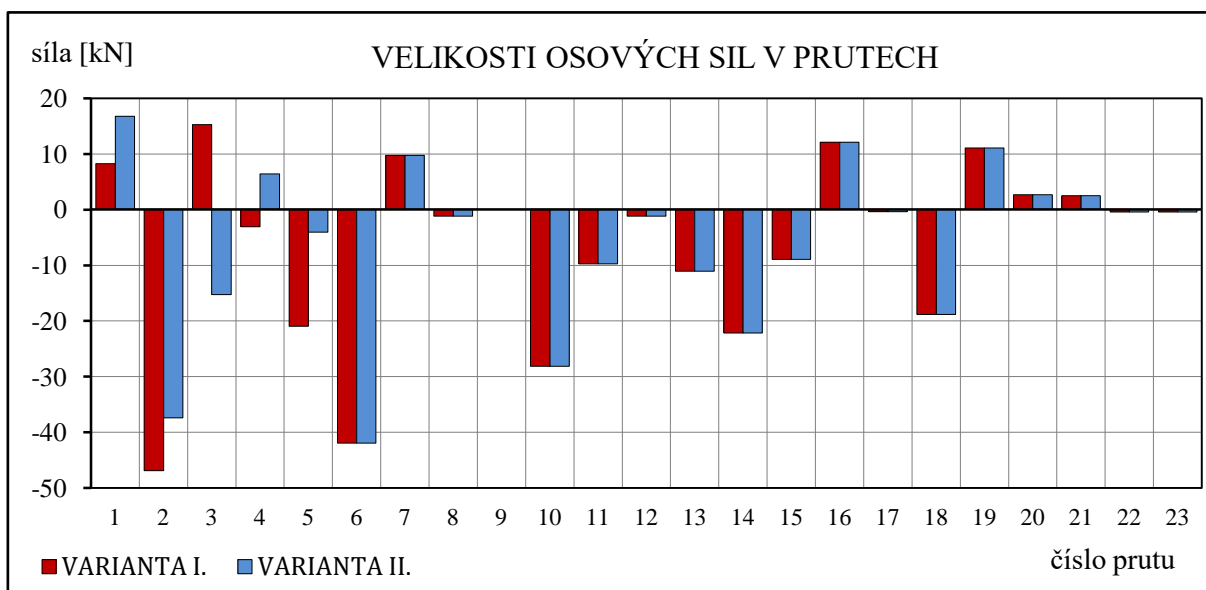
$$\sum F_y = 0: N_7 \cdot \sin 45^\circ + N_8 - N_4 \cdot \sin \beta = 0$$

#### 4.2.4. Výsledky

Sepsáním rovnic pro pozměněné styčníky se získala upravená soustava rovnic, množina neznámých parametrů zůstala totožná s předchozí variantou, viz příloha C. Stejně, jako v předešlé variantě, byla soustava vyřešena pomocí softwaru MATLAB, naprogramovaný skript lze vidět na příloženém CD. Výsledné hodnoty osových sil v prutech jsou uvedeny v tabulce 4.2 a znázorněny v grafu na obrázku 4.23.

**Tab. 4.2** Velikosti osových sil v prutech pro druhou variantu (minus značí namáhání tlakem).

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
osová síla [kN]	16,74	-37,43	-15,26	6,38	-4,05	-41,94	9,76	-1,19
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
osová síla [kN]	0,00	-28,14	-9,76	-1,19	-11,09	-22,17	-8,94	12,13
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
osová síla [kN]	-0,37	-18,82	11,09	2,69	2,51	-0,41	-0,41	–

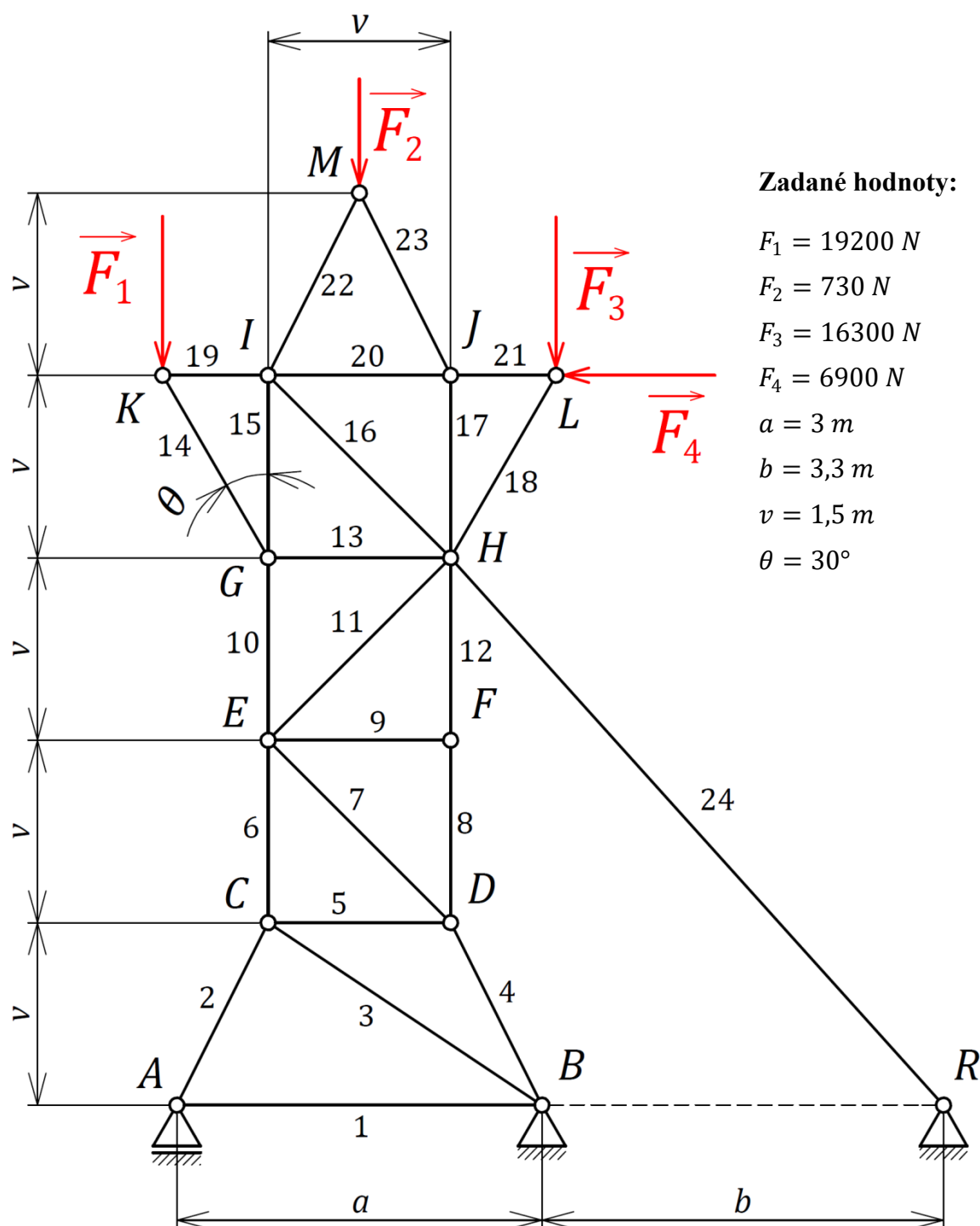


**Obr. 4.23** Graf velikostí osových sil v prutech první a druhé varianty.

Přemístěním prutu 3 se změnila velikosti osových sil v prutech 1 až 5, v ostatních prutech zůstaly osově síly totožné s předešlou variantou. Docílilo se snížení velikosti osově síly v prutu 2, a to z  $-46,89 \text{ kN}$  na  $-37,43 \text{ kN}$ . Největší velikost osově síly je ve druhé variantě v prutu číslo 6,  $N_6 = -41,94 \text{ kN}$ .

### 4.3. Výpočet osových sil v prutech třetí varianty

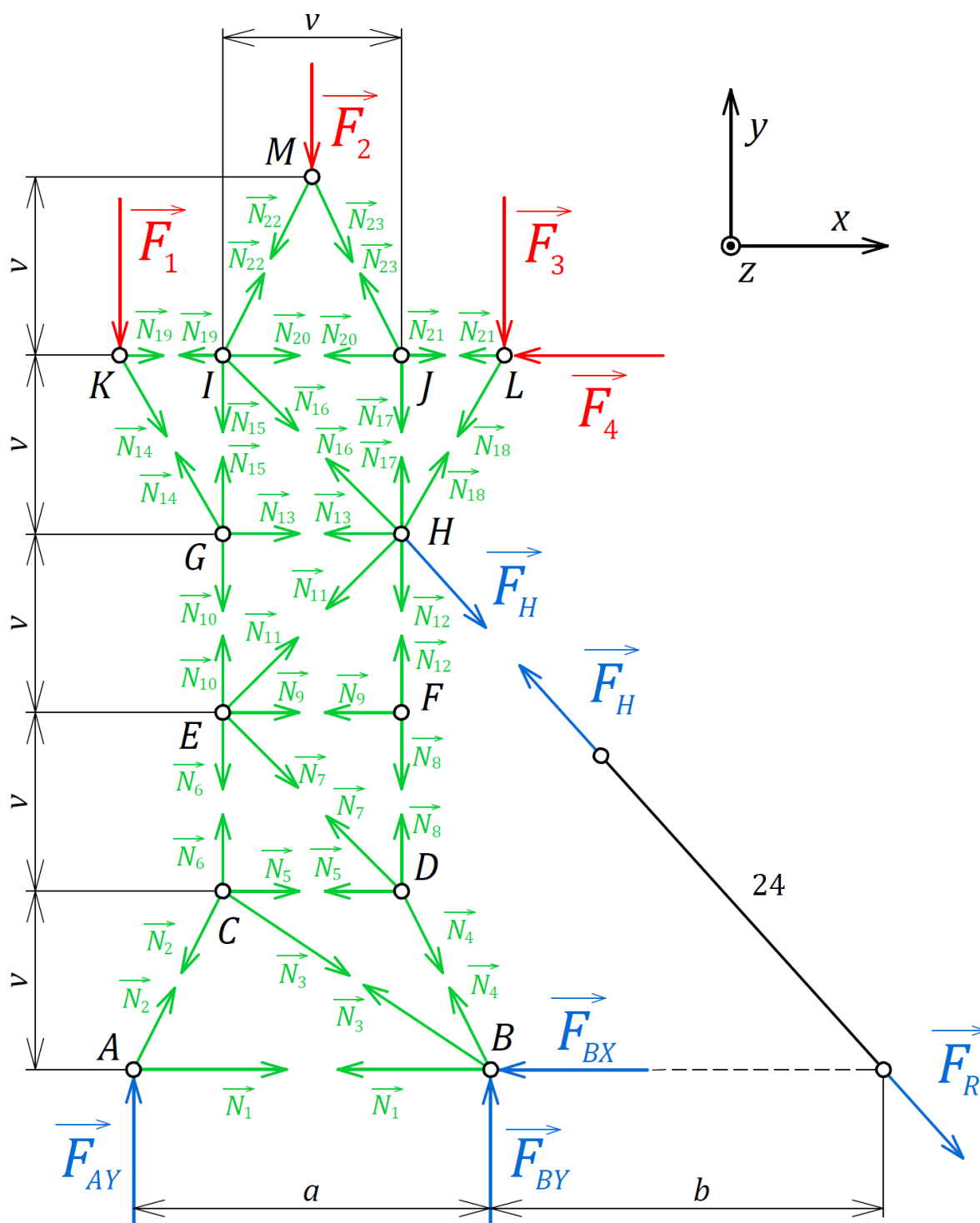
Díky kladnému přínosu zmenšení osově síly v prutu 2 bude ve třetí variantě ponechána konstrukční úprava z druhé varianty. Nově bude k prutové soustavě z boku přidán prut spojující styčník  $H$  se zemí. Hlavním cílem je snížit namáhání prutů číslo 2 a 6. Upravenou prutovou soustavu lze vidět na obrázku 4.24. Rozměry a zatížení prutové soustavy zůstávají opět stejné. Materiál a průřez přidaného prutu je totožný s materiálem ostatních prutů.



Obr. 4.24 Prutová soustava. Varianta třetí.

### 4.3.1. Úplné uvolnění

Ačkoli je prut 24 binárním členem, nejedná se o prut prutové soustavy. Rovněž rotační vazbu  $R$  nelze považovat za styčník prutové soustavy. Předpokladem prutových soustav je, že ve styčníku se musejí stýkat minimálně dva pruty, viz kapitola 2.2. Vazba mezi styčníkem  $H$  a prutem 24 se nahradí silou  $F_H$ . Rotační vazba  $R$  se nahradí silou  $F_R$ . Ostatní vnější vazby se uvolní stejně jako v předchozích variantách. Úplné uvolnění je znázorněno na obrázku 4.25.



Obr. 4.25 Úplné uvolnění třetí varianty.

### 4.3.2. Posouzení statické určitosti

#### Vnější statická určitost:

Vnější statická určitost je dána vztahem (2–1). Ve třetí variantě působí na prutovou soustavu čtyři neznámé vnější stykové síly ( $F_{AY}, F_{BX}, F_{BY}, F_H$ ). Síla  $F_R$  je pouze vnější stykovou silou prutu číslo 24, nejedná se o vnější stykovou sílu prutové soustavy. Z podmínky statické rovnováhy prutu 24 platí  $F_H = F_R$ . Pro prutovou soustavu lze napsat tři použitelné podmínky statické rovnováhy. Soustava je vnějškově jedenkrát staticky neurčitá.

$$s_{ext} = \mu - v = 4 - 3 = 1$$

#### Vnitřní statická určitost:

Počet prutů  $p = 23$  a počet styčníků  $k = 13$ . Nutná podmínka vnitřní statické určitosti je splněna, viz vztah (2–2).

$$p = 2 \cdot k - 3$$

$$23 = 2 \cdot 13 - 3$$

$$26 = 26$$

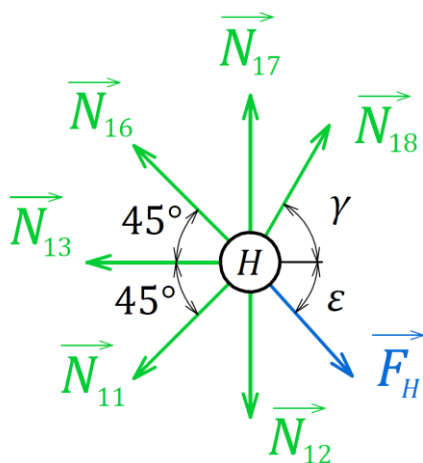
Podmínka vnější statické určitosti není splněna, soustava je vnějškově jedenkrát staticky neurčitá. Aby bylo možné vyčíslit velikosti osových sil v jednotlivých prutech, bude potřeba soustavu částečně uvolnit a předepsat deformační podmínku.

### 4.3.3. Uvolnění styčníků a sepsání podmínek statické rovnováhy

V prutové soustavě nastala jediná změna ve styčniku  $H$ . Uvolnění ostatních styčníků, a tedy i jejich podmínky statické rovnováhy zůstaly beze změny. Uvolnění styčniku  $H$  lze vidět na obrázku 4.26.

$$\sum F_x = 0: N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{11} \cdot \cos 45^\circ - N_{13} - N_{16} \cdot \cos 45^\circ + F_H \cdot \cos \varepsilon = 0$$

$$\sum F_y = 0: N_{16} \cdot \sin 45^\circ + N_{17} + N_{18} \cdot \sin \gamma - N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_{12} - F_H \cdot \sin \varepsilon = 0$$

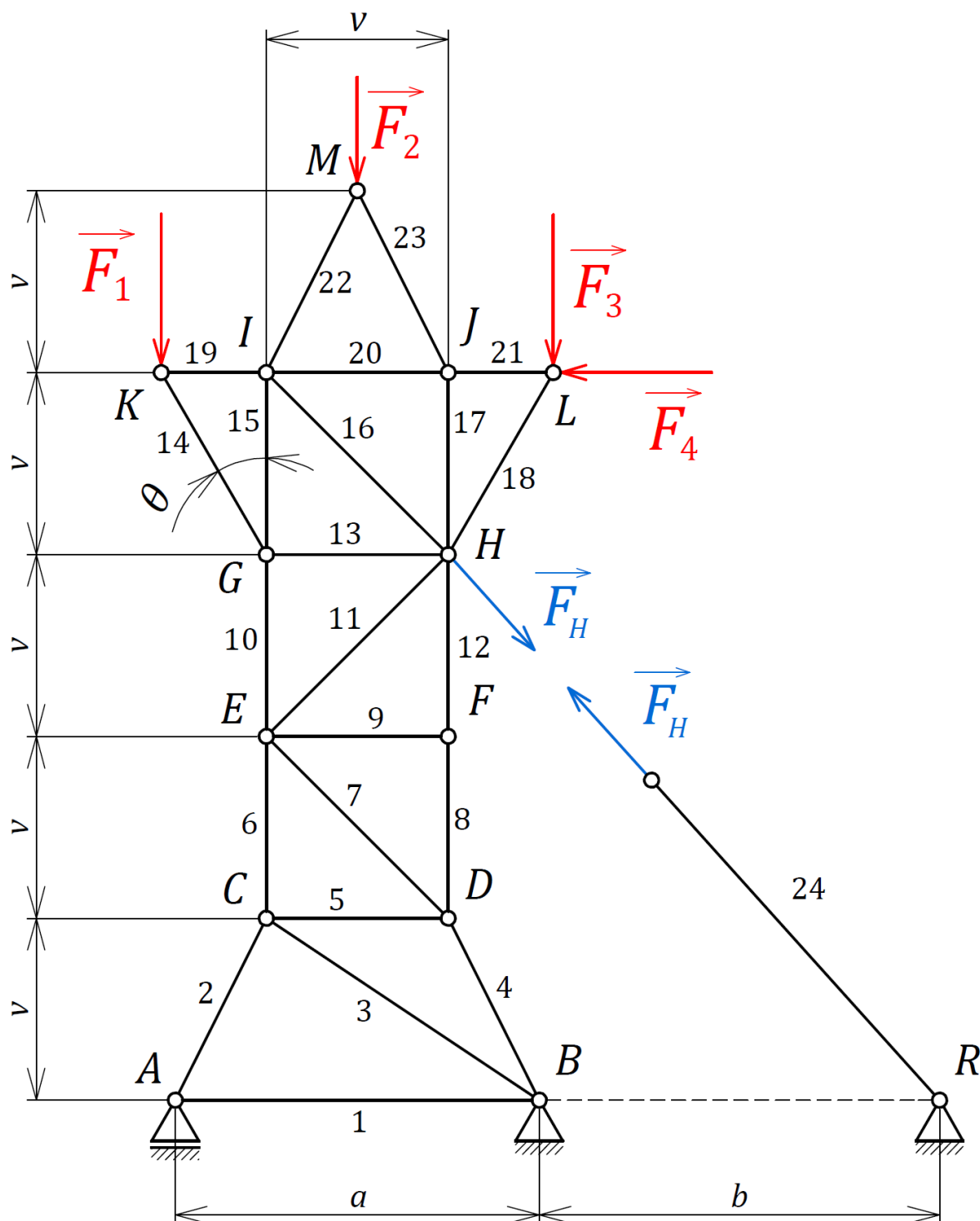


Obr. 4.26 Styčník  $H$  (III).



#### 4.3.4. Částečné uvolnění

Částečné uvolnění se provede uvolněním vazby mezi styčником  $H$  a prutem 24 pomocí stykové síly  $F_H$ . Ostatní vazby zůstanou neuvolněné. V místě působitě síly  $F_H$  se předepíše deformační podmínka, která udává, že posuv styčnicku  $H$  prutové soustavy se musí rovnat posuvu koncového prutu 24, který je se styčником  $H$  ve skutečnosti pevně spojen. Částečné uvolnění lze vidět na obrázku 4.27.



Obr. 4.27 Částečné uvolnění třetí varianty.

#### 4.3.5. Deformační podmínka

Jestliže posuv prutové soustavy a prutu číslo 24 v místě jejich spojení je stejný, musí podle Castiglianovy věty (3–10) platit, že velikost parciální derivace energie napjatosti celé prutové soustavy  $W^{1÷23}$  podle síly  $F_H$  se musí rovnat velikosti parciální derivace energie napjatosti prutu číslo 24 podle síly  $F_H$ .

$$\frac{\partial W^{1÷23}}{\partial F_H} = -\frac{\partial W^{24}}{\partial F_H} \quad (4-1)$$

*Pozn.: Směr a velikost posuvu styčnicku H a koncového bodu prutu 24 jsou stejné, jsou spolu pevně spojeny. Avšak směr síly  $F_H$ , která působí ve styčnicku H je z důvodu zákona akce a reakce opačný se směrem síly  $F_H$ , působící na koncový bod prutu 24. Z tohoto důvodu je potřeba před jednu stranu rovnice deformační podmínky přidat mínus.*

Dosazením do vztahu (4–1) za energie napjatosti  $W^{1÷23}$  a  $W^{24}$  ze vztahu (3–9) a postupnou úpravou lze deformační podmínku převést do tvaru vztahu (4–2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial F_H} \left( \sum_{i=1}^{23} \left( \int_0^{l_i} \frac{N_i^2}{2 \cdot E \cdot S_i} dx \right) \right) &= -\frac{\partial}{\partial F_H} \left( \int_0^{l_{24}} \frac{N_{24}^2}{2 \cdot E \cdot S_{24}} dx \right) \\ \frac{\partial}{\partial F_H} \left( \sum_{i=1}^{23} \frac{N_i^2 \cdot l_i}{2 \cdot E \cdot S_i} \right) &= -\frac{\partial}{\partial F_H} \left( \frac{N_{24}^2 \cdot l_{24}}{2 \cdot E \cdot S_{24}} \right) \\ \sum_{i=1}^{23} \left( \frac{l_i}{2 \cdot E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial(N_i^2)}{\partial F_H} \right) &= -\frac{l_{24}}{2 \cdot E \cdot S_{24}} \cdot \frac{\partial(N_{24}^2)}{\partial F_H} \\ \sum_{i=1}^{23} \left( \frac{l_i}{2 \cdot E \cdot S_i} \cdot 2 \cdot N_i \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_H} \right) &= -\frac{l_{24}}{2 \cdot E \cdot S_{24}} \cdot 2 \cdot N_{24} \cdot \frac{\partial N_{24}}{\partial F_H} \\ \sum_{i=1}^{23} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_H} &= -\frac{N_{24} \cdot l_{24}}{E \cdot S_{24}} \cdot \frac{\partial N_{24}}{\partial F_H} \end{aligned} \quad (4-2)$$

*Pozn.: Osová síla v prutu číslo 24 se rovná stykové síle  $F_H$ . ( $N_{24} = F_H$ )*

Ve třetí variantě lze pro jednotlivé styčníky sepsat dvacet šest rovnic, ve kterých se ale vyskytuje dvacet sedm neznámých parametrů. Takováto soustava rovnic má nekonečně mnoho závislých řešení. Připsáním deformační podmínky do soustavy rovnic dostává soustava jednoznačné řešení. Deformační podmínka slouží jako doplňková rovnice, díky které je možné vyčíslit velikosti jednotlivých osových sil v prutech.

V rovnici deformační podmínky se vyskytují derivace osových sil jednotlivých prutů podle síly  $F_H$ . Jednotlivé osově síly jsou na síle  $F_H$  závislé. Je tedy potřeba vyjádřit jednotlivé osově síly v závislosti na  $F_H$  a následně provést derivaci.

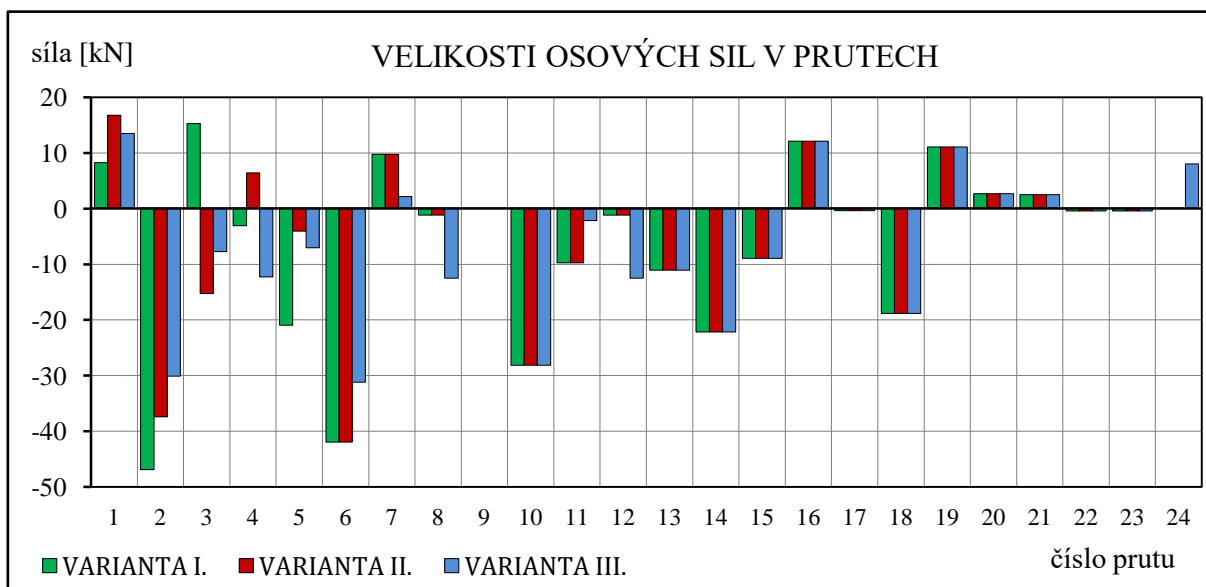
#### 4.3.6. Výsledky

Z rovnic statické rovnováhy pro jednotlivé styčníky a z deformační podmínky se získala soustava dvaceti sedmi rovnic o dvaceti sedmi neznámých parametrech. Neznámým parametrům odpovídají osové síly v jednotlivých prutech soustavy a vnější stykové síly  $F_{AY}$ ,  $F_{BX}$ ,  $F_{BY}$ ,  $F_H$ . Soustavu rovnic a množinu neznámých parametrů lze nalézt v příloze D.

Stejně jako v předešlých variantách byl pro vyřešení soustavy rovnic napsán skript v softwaru MATLAB. Při výpočtu třetí varianty bylo nejprve potřeba najít velikosti osových sil v jednotlivých prutech v závislosti na  $F_H$ . Toho se docílilo vyřešením soustavy pouze styčnickových rovnic bez deformační podmínky, tedy soustavy dvaceti šesti rovnic o dvaceti sedmi neznámých. Následně se z řešení závislého na  $F_H$  vyčíslily příslušné derivace a z deformační podmínky se určila velikost síly  $F_H$ , která se zpětně dosadila do závislého řešení, a tím byly zjištěny skutečné velikosti osových sil v prutech. Velikost osové síly v prutu číslo 24 je rovna velikosti  $F_H$ . Při výpočtu se uvažoval totožný průřez všech prutů. Skript pro výpočet třetí varianty lze vidět na přiloženém CD. Výsledné hodnoty osových sil v prutech jsou uvedeny v tabulce 4.3 a znázorněny v grafu na obrázku 4.28.

**Tab. 4.3** Velikosti osových sil v prutech pro třetí variantu (minus značí namáhání tlakem).

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
osová síla [kN]	13,46	-30,09	-7,73	-12,29	-7,03	-31,20	2,17	-12,53
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
osová síla [kN]	0,00	-28,14	-2,17	-12,53	-11,09	-22,17	-8,94	12,13
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
osová síla [kN]	-0,37	-18,82	11,09	2,69	2,51	-0,41	-0,41	8,03



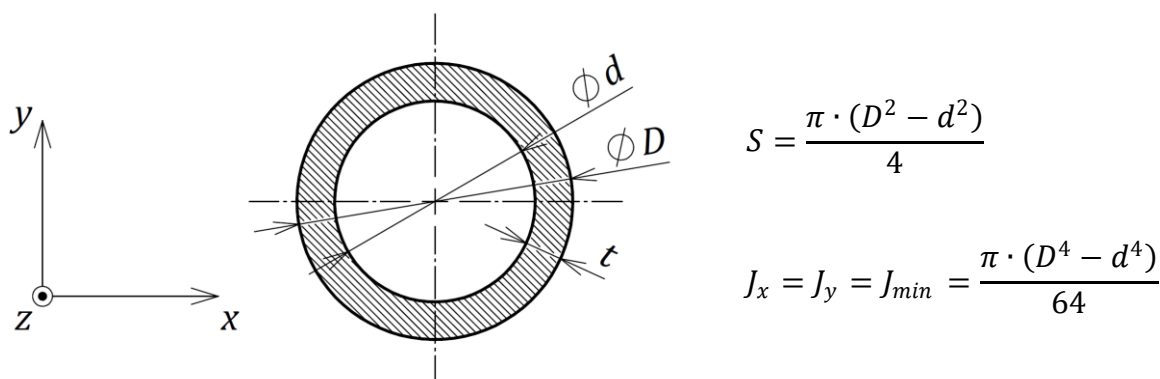
**Obr. 4.28** Graf velikostí osových sil v prutech první, druhé a třetí varianty.

Přidáním prutu 24 se ještě více snížila velikost osové síly v prutu 2, a také výrazně pokleslo zatížení prutu 6. Třetí varianta bude použita pro návrh průřezů prutů soustavy a následně pro výpočet deformačních posuvů.

#### 4.4. Návrh průřezů

V této kapitole bude pro třetí variantu zvolené prutové soustavy navrhnut průřez prutů. Pruty budou vyrobeny z trubek s profilem tvaru mezikruží, řídícím se podle normy EN 10220.

Zvolený profil prutů, mezikruží, lze popsat třemi charakteristickými rozměry. Vnější průměr  $D$ , vnitřní průměr  $d$  a tloušťkou stěny  $t$ . K úplnému definování průřezu přitom stačí pouze dva ze tří charakteristických rozměrů. Zobrazení vybraného profilu se zakótovanými rozměry lze vidět na obrázku 4.29, v obrázku jsou také uvedeny vztahy pro výpočet obsahu  $S$  a osového kvadratického momentu průřezu  $J$ .



Obr. 4.29 Zvolený profil prutů a jeho průřezové charakteristiky.

Rozměry průřezů budou navrženy vzhledem k meznímu stavu pružnosti a k meznímu stavu vzpěrné stability. U prutových soustav se na koncích prutů předpokládají rotační vazby, koeficient zohledňující uložení prutů  $\alpha$  lze určit z obrázku 3.7.

$$\alpha = \pi$$

##### 4.4.1. Návrh totožného průřezu pro všechny pruty soustavy

Dosazením do rovnice (3–20) za obsah průřezu  $S$  z obrázku 4.29, lze vyjádřit vztah pro vnější průměr průřezu:

$$\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = \frac{k_{MSP} \cdot N}{\sigma_K} \rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N}{\sigma_K \cdot \pi} + d^2} \quad (4-3)$$

Podobně dosazením do rovnice (3–21) za minimální osový kvadratický moment průřezu  $J_{min}$  z obrázku 4.29 a následnou úpravou se dostane vztah:

$$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N}{\alpha^2 \cdot E} \rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} + d^4} \quad (4-4)$$

Při návrhu totožného průřezu pro všechny pruty je potřeba v soustavě určit dva nejkritičtější namáhané pruty. Prvním je prut s největší absolutní velikostí osově síly, což je prut, ve kterém bude bezpečnost k meznímu stavu pružnosti nejmenší. Osová síla tohoto prutu bude dále označena  $N_{MSP}$ , ve třetí variantě se jedná o prut číslo 6,  $N_{MSP} = |N_6| = 31,20 \text{ kN}$ . Druhým je prut, ve kterém bude nejmenší bezpečnost k meznímu stavu vzpěrné stability. Jedná se o prut namáhaný tlakem, ve kterém absolutní hodnota součinu osově síly a druhé mocniny jeho

délky nabývá nejvyšší hodnoty. Osová síla tohoto prutu bude dále označena  $N_{MSVS}$ . Ve třetí variantě se jedná o prut číslo 2,  $N_{MSVS} = |N_2| = 30,09 \text{ kN}$ . Do vztahu pro výpočet  $D$  z hlediska mezního stavu pružnosti, vztah (4–3), je potřeba dosazovat velikost osově síly  $N_{MSP}$ . Obdobně do vztahu pro výpočet  $D$  z hlediska mezního stavu vzpěrné stability, vztah (4–4), je potřeba dosazovat velikost osově síly  $N_{MSVS}$  a za  $l$  pak délku příslušného prutu.

$N_{MSP}$  – velikost osově síly v prutu nejkritičtěji namáhaného vůči MSP

$N_{MSVS}$  – velikost osově síly v prutu nejkritičtěji namáhaného vůči MSVS

Dosazením  $N_{MSP}$  do vztahu (4–3) a  $N_{MSVS}$  do vztahu (4–4) a jejich sečtením a následnou úpravou lze vyjádřit vztah pro výpočet velikosti vnitřního průměru  $d$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi} + d^2} &= \sqrt[4]{\frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} + d^4} \\ \left(\frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi} + d^2\right)^2 &= \frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} + d^4 \\ 16 \cdot \left(\frac{k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi}\right)^2 + 8 \cdot \frac{k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi} \cdot d^2 + d^4 &= \frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} + d^4 \\ d^2 &= \frac{\sigma_K \cdot \pi}{k_{MSP} \cdot N_{MSP}} \cdot \left(\frac{8 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} - 2 \cdot \left(\frac{k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi}\right)^2\right) \\ d &= \sqrt{\frac{8 \cdot \sigma_K \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{k_{MSP} \cdot N_{MSP} \cdot \alpha^2 \cdot E} - \frac{2 \cdot k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi}} \quad (4-5) \end{aligned}$$

Dosazením do vztahu (4–5) za hodnoty  $N_{MSP} = |N_6| = 31,20 \text{ kN}$ ,  $N_{MSVS} = |N_2| = 30,09$ ,  $l = l_2 = 1677,05 \text{ mm}$  byla vypočítána velikost vnitřního průměru  $d$ .

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{8 \cdot \sigma_K \cdot k_{MSVS} \cdot l_2^2 \cdot N_2}{k_{MSP} \cdot N_6 \cdot \alpha^2 \cdot E} - \frac{2 \cdot k_{MSP} \cdot N_6}{\sigma_K \cdot \pi}} = \\ &= \sqrt{\frac{8 \cdot 235 \cdot 3 \cdot 1677,05^2 \cdot 30091,81}{3 \cdot 31201,13 \cdot \pi^2 \cdot 210000} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 31201,13}{235 \cdot \pi}} = 46,977 \text{ mm} \end{aligned}$$

Zpětným dosazením spočteného vnitřního průměru  $d$  do vztahu (4–3) lze vyčíslit hodnotu vnějšího průměru  $D$ .

$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N_6}{\sigma_K \cdot \pi} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3 \cdot 31201,13}{235 \cdot \pi} + 46,977^2} = 52,096 \text{ mm}$$

**Výsledné rozměry ideálního průřezu:**

$$D = 52,096 \text{ mm}, \quad d = 46,977 \text{ mm}, \quad t = \frac{(D - d)}{2} = 2,560 \text{ mm}$$

Na základě výsledných rozměrů byl dle normy EN 10220 zvolen následující průřez.

**Rozměry zvoleného průřezu:**

$$D = 54 \text{ mm}, \quad d = 48,8 \text{ mm}, \quad t = 2,6 \text{ mm}$$

Při volbě normovaného průřezu byly z normy vybrány dva průřezy. První průřez byl vybrán zvolením nejbližší normované tloušťky stěny k tloušťce stěny ideálního průřezu a následným dopočítáním vnějšího průměru. Druhý průřez byl vybrán zvolením nejbližšího normovaného vnějšího průměru k vnějšímu průměru ideálního průřezu a následným dopočítáním tloušťky stěny. Z těchto dvou průřezů byl následně zvolen ten s menší plochou průřezu. Odvozené vztahy pro zvolení normovaného průřezu lze vidět v příloze E.

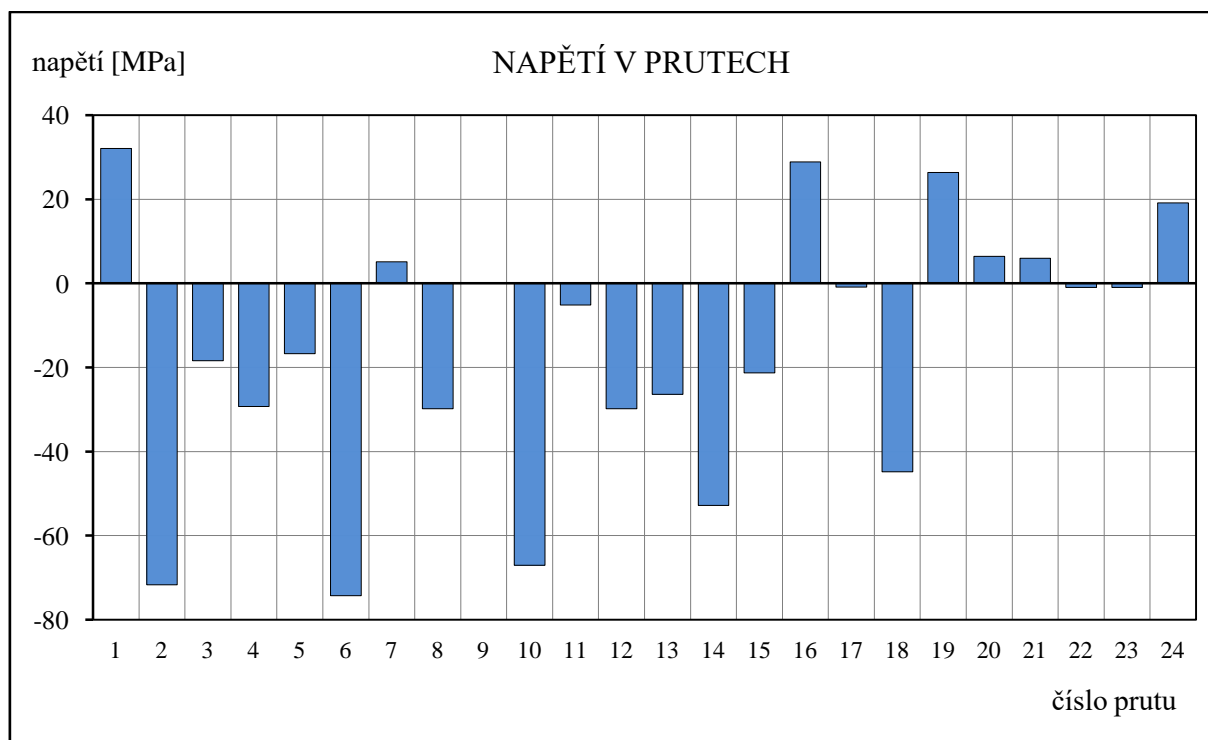
Zvolením rozměrů průřezu lze dosadit do vztahu (3–5) a následně vyčíslit velikosti napětí v jednotlivých prutech, za osově síly se dosadí hodnoty z tabulky 4.3. V prutech se může vyskytovat tahová nebo tlaková napjatost. Bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti se spočítají jako poměr meze kluzu ke skutečnému napětí v prutech, viz vztah (3–12). V prutech zatížených tlakem se vyčíslí velikost bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability dosazením do vztahu (3–14). Protože je vztah (3–13) omezen svojí platností na interval  $\lambda \geq \lambda_K$ , jsou hodnoty bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability pro pruty se štíhlostí  $\lambda < \lambda_K$  pouze orientační. Skutečné hodnoty bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability těchto prutů jsou menší. Jsou však větší než bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti. Štíhlost prutů  $\lambda$  se spočítá ze vztahu (3–17). Spočítané hodnoty lze vidět v tabulce 4.4. Štíhlosti prutů namáhaných tlakem, pro které platí  $\lambda \geq \lambda_K$ , jsou v tabulce zvýrazněny červeně. Všechny hodnoty bezpečností jsou větší než minimální požadovaná bezpečnost. Hodnota mezní štíhlosti  $\lambda_K$  se spočítá ze vztahu (3–18).

$$\lambda_K = \alpha \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{210000}{235}} = 93,91$$

Na obrázku 4.30 lze vidět graf znázorňující napětí v jednotlivých prutech soustavy s navrhnutým totožným průřezem všech prutů.

**Tab. 4.4** Hodnoty bezpečností  $k_{MSP}$ ,  $k_{MSVS}$  a štiřlostí  $\lambda$  prutů se zvoleným totožným průřezem.

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma$ [MPa]	32,05	-71,67	-18,40	-29,28	-16,74	-74,32	5,16	-29,83
$k_{MSP}$	7,33	3,28	12,77	8,03	14,04	3,16	45,57	7,88
$k_{MSVS}$	$\infty$	3,40	5,10	8,33	18,22	4,10	$\infty$	10,22
$\lambda$	164,87	92,17	148,61	92,17	82,44	82,44	116,58	82,44
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma$ [MPa]	0,00	-67,02	-5,16	-29,83	-26,40	-52,81	-21,29	28,88
$k_{MSP}$	$\infty$	3,51	45,57	7,88	8,90	4,45	11,04	8,14
$k_{MSVS}$	$\infty$	4,55	29,57	10,22	11,55	4,33	14,32	$\infty$
$\lambda$	82,44	82,44	116,58	82,44	82,44	95,19	82,44	116,58
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
$\sigma$ [MPa]	0,87	44,83	26,40	6,42	5,98	0,97	0,97	19,12
$k_{MSP}$	270,31	5,24	8,90	36,63	39,30	241,77	241,77	12,29
$k_{MSVS}$	350,81	5,10	$\infty$	$\infty$	$\infty$	251,02	251,02	$\infty$
$\lambda$	82,44	95,19	47,59	82,44	47,59	92,17	92,17	332,72

**Obr. 4.30** Napětí v prutech s totožným průřezem.

#### 4.4.2. Návrh různých průřezů prutů soustavy

V předešlé podkapitole byl pro všechny pruty soustavy navržen totožný průřez, což je z výrobního hlediska jistou výhodou. Z tabulky 4.4 je patrné, že méně zatížené pruty prutové soustavy jsou při tomto řešení značně naddimenzovány. Teoreticky je možné pro každý prut soustavy navrhnout průřez samostatně. Pokud by byl pro návrh opět použit vztah (4–5), není již důvod rozlišovat hodnoty  $N_{MSP}$  a  $N_{MSVS}$ . Rovnici pro výpočet vnitřního průměru  $i$ -tého prutu  $d_i$  lze potom přepsat do zjednodušeného tvaru.

$$d_i = \sqrt{\frac{8 \cdot \sigma_K \cdot k_{MSVS} \cdot l_i^2}{k_{MSP} \cdot \alpha^2 \cdot E} - \frac{2 \cdot k_{MSP} \cdot N_i}{\sigma_K \cdot \pi}} \quad (4-6)$$

Pro vnější průměr pak platí:

$$D_i = \sqrt{\frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N_i}{\sigma_K \cdot \pi} + d_i^2} = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l_i^2 \cdot N_i}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} + d_i^4} \quad (4-7)$$

Vztahy (4–6) a (4–7) byly odvozeny pro pruty, u kterých se požaduje dodržení bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability. Z tohoto důvodu je není vhodné použít pro výpočet rozměrů prutů namáhaných tahem, u kterých mezní stav vzpěrné stability nemůže nastat. Pro pruty namáhané tahem je vhodnější navrhnout průřez pouze ze vztahu (3–20). Z jednoho vztahu však není možné jednoznačně určit průřez ve tvaru mezikruží, který je definován dvěma rozměry. Vhodným způsobem jak předejít tomuto problému je například předem zvolit tloušťku průřezu, nebo nahradit mezikruží jiným tvarem, definovaným pouze jedním rozměrem.

Dosažením velikostí osových sil z tabulky 4.3 do vztahů (4–6), (4–7) za  $N_i$  se dopočítaly průřezy prutů namáhaných tlakem. U prutů namáhaných tahem se pouze vyčíslily velikosti ploch průřezu pomocí vztahu (3–20). Tím se pro jednotlivé pruty určily různé velikosti ploch průřezů. Při výpočtu osových sil v kapitole 4.3.6 byl předpokládán průřez všech prutů stejný. Nyní se průřezy prutů liší. Je tedy potřeba přepočítat skutečné velikosti osových sil pro nové průřezy. Toho se docílí dosažením velikostí ploch průřezů do deformační podmínky, viz vztah (4–2). Přepočítané velikosti osových sil, obsahy ploch průřezů a přepočítané bezpečnosti  $k_{MSP}$  a  $k_{MSVS}$  všech prutů jsou uvedeny v tabulce 4.5. U prutů namáhaných tlakem jsou v tabulce dále uvedeny rozměry vnějších průměrů  $D$ , tloušťek stěn  $t$  a štíhlostí. Protože se pruty namáhané tlakem navrhovaly za podmínky  $k_{MSP} = k_{MSVS}$ , rovnají se štíhlosti těchto prutů  $\lambda_K$ . Pro pruty zatížené tlakem potom musí platit  $k_{MSVS} = k_{MSP}$ .

Přepočítané bezpečnosti se v některých prutech výrazně liší od zvolených hodnot bezpečností, například u prutů číslo 7 a 11. Při návrhu různých průřezů prutů prutové soustavy je tedy nutno uvažovat změnu velikostí osových sil od velikostí osových sil spočtených z předpokladu totožných průřezů.

*Pozn.: Změna velikostí osových sil v prutech se vyskytne pouze v případě staticky neurčitých prutových soustav. V případě staticky určitých prutových soustav nemají různé velikosti ploch průřezů na osově síly vliv.*



Tab. 4.5 Přepočítané hodnoty pro teoretické průřezy.

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
osová síla [kN]	13,79	-30,83	-8,49	-10,40	-6,73	-32,29	2,93	-11,38
$D$ [mm]	–	52,87	81,83	51,49	45,80	47,90	–	46,29
$t$ [mm]	–	2,42	0,39	0,99	0,63	2,81	–	1,13
$S$ [mm <sup>2</sup> ]	171,80	384,15	98,64	156,92	89,72	398,31	27,64	159,90
$k_{MSP}$	2,93	2,93	2,73	3,54	3,13	2,90	2,21	3,30
$k_{MSVS}$	$\infty$	2,93	2,73	3,54	3,13	2,90	$\infty$	3,30
$\lambda$	–	93,91	93,91	93,91	93,91	93,91	–	93,91
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
osová síla [kN]	0,00	-28,14	-2,93	-11,38	-11,09	-22,17	-8,94	12,13
$D$ [mm]	–	47,64	64,03	46,29	46,16	53,86	45,97	–
$t$ [mm]	–	2,54	0,14	1,13	1,00	1,73	0,80	–
$S$ [mm <sup>2</sup> ]	–	359,23	27,64	159,90	141,51	283,02	114,12	154,80
$k_{MSP}$	$\infty$	3,00	2,21	3,30	3,00	3,00	3,00	3,00
$k_{MSVS}$	$\infty$	3,00	2,21	3,30	3,00	3,00	3,00	$\infty$
$\lambda$	–	93,91	93,91	93,91	93,91	93,91	93,91	–
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
osová síla [kN]	-0,37	-18,82	11,09	2,69	2,51	-0,41	-0,41	7,21
$D$ [mm]	45,21	53,61	–	–	–	50,54	50,54	–
$t$ [mm]	0,03	1,47	–	–	–	0,03	0,03	–
$S$ [mm <sup>2</sup> ]	4,66	240,28	141,51	34,38	32,05	5,21	5,21	102,46
$k_{MSP}$	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,34
$k_{MSVS}$	3,00	3,00	$\infty$	$\infty$	$\infty$	3,00	3,00	$\infty$
$\lambda$	93,91	93,91	–	–	–	93,91	93,91	–

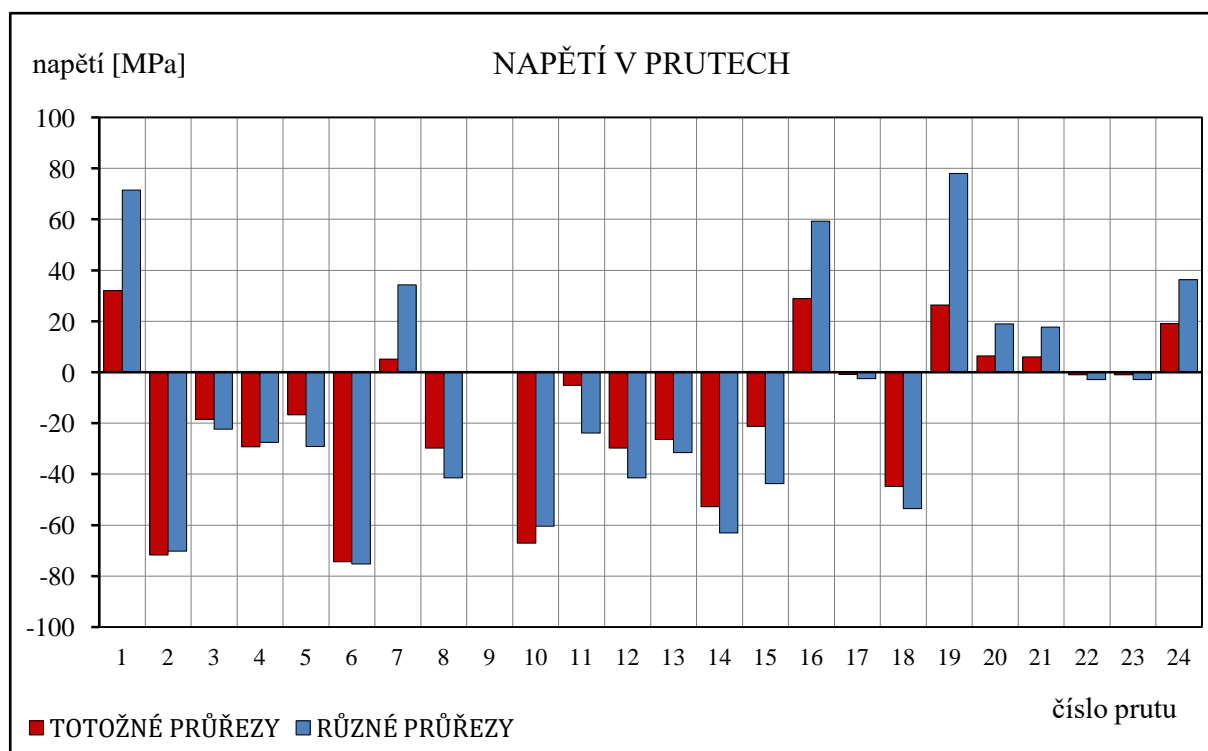
Přestože přepočítané bezpečnosti jsou v některých prutech menší než byla požadovaná hodnota, nedojde v žádném z nich k meznímu stavu pružnosti ani k meznímu stavu vzpěrné stability (nejnižší bezpečnost  $k_{MSP} = k_{MSVS} = 2,21$ ). Navržené průřezy však mají prakticky nevyrobitelné rozměry, je potřeba aby průřezy odpovídaly vybrané normě. Z výrobního hlediska by rovněž bylo vhodnější nenavrhovat pro každý prut různý průřez, ale z normy vybrat pouze omezený počet průřezů a ty následně rozdělit jednotlivým prutům vzhledem k velikosti jejich namáhání. Za tímto účelem byl naprogramován skript pro software MATLAB. Na základě vypočtených hodnot v tabulce 4.5 byly vybrány čtyři konkrétní průřezy, které slouží jako vstup do naprogramovaného skriptu. Funkci skriptu lze popsat následovně. Ve všech prutech soustavy se provede výpočet bezpečností pro každý ze čtyř průřezů. Skript podle podmínky bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti a k meznímu stavu vzpěrné stability vybere jednotlivým prutům vhodný profil. Úloha je řešena iteračně, skript přepočítává osové síly v prutech, iterace probíhají tak dlouho, dokud v kroku  $n$  nejsou navržené stejné průřezy jako v kroku  $n - 1$ . V případě, kdy by se v některém z prutů

vyskytovala osová síla taková, že není splněna podmínka bezpečnosti ani pro jeden ze čtveřice průřezů, skript zahlásí varování nesplnění podmínky, vybere největší možný průřez a následně provede výpočet.

#### Vybraná čtveřice průřezů:

1.	$D = 54,0 \text{ mm}$	$d = 48,2 \text{ mm}$	$t = 2,9 \text{ mm}$
2.	$D = 51,0 \text{ mm}$	$d = 46,4 \text{ mm}$	$t = 2,3 \text{ mm}$
3.	$D = 38,0 \text{ mm}$	$d = 34,4 \text{ mm}$	$t = 1,8 \text{ mm}$
4.	$D = 33,7 \text{ mm}$	$d = 30,9 \text{ mm}$	$t = 1,4 \text{ mm}$

Rozdělení průřezů jednotlivým prutům pomocí naprogramovaného skriptu lze vidět v tabulce 4.6. V tabulce jsou dále uvedeny přepočítané hodnoty osových sil, napětí, bezpečností a štíhlostí jednotlivých prutů. U prutů s hodnotami štíhlostí  $\lambda < \lambda_K$ , jsou hodnoty bezpečností  $k_{MSVS}$  pouze orientační. Štíhlosti prutů, pro které platí  $\lambda \geq \lambda_K$ , jsou v tabulce opět zvýrazněny červeně, ( $\lambda_K = 93,91$ ). Rozložení napětí v jednotlivých prutech lze vidět v grafu na obrázku 4.31.



**Obr. 4.31** Srovnání napětí v prutech soustav s totožnými a různými průřezy.

Tab. 4.6 Přepočítané hodnoty pro zvolenou čtveřici průřezů.

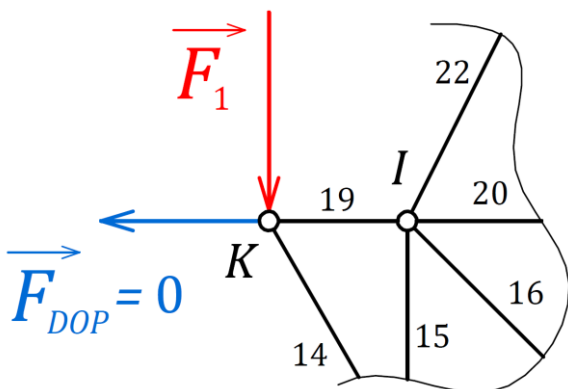
číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
osová síla [kN]	14,63	-32,71	-10,42	-5,62	-5,96	-35,04	4,88	-8,48
$D$ [mm]	38,00	54,00	54,00	38,00	38,00	54,00	33,70	38,00
$t$ [mm]	1,80	2,90	2,90	1,80	1,80	2,90	1,40	1,80
$\sigma$ [MPa]	71,47	-70,27	-22,37	-27,45	-29,13	-75,26	34,34	-41,40
$k_{MSP}$	3,29	3,34	10,50	8,56	8,07	3,12	6,84	5,68
$k_{MSVS}$	$\infty$	3,43	4,15	4,41	5,19	4,01	$\infty$	3,65
$\lambda$	234,11	92,68	149,44	130,87	117,06	82,89	185,58	117,06
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
osová síla [kN]	0,00	-28,14	-4,88	-8,48	-11,09	-22,17	-8,94	12,13
$D$ [mm]	33,70	54,00	38,00	38,00	51,00	51,00	38,00	38,00
$t$ [mm]	1,40	2,90	1,80	1,80	2,30	2,30	1,80	1,80
$\sigma$ [MPa]	0,00	-60,44	-23,83	-41,40	-31,50	-63,00	-43,67	59,24
$k_{MSP}$	$\infty$	3,89	9,86	5,68	7,46	3,73	5,38	3,97
$k_{MSVS}$	$\infty$	4,99	3,17	3,65	8,69	3,26	3,46	$\infty$
$\lambda$	131,23	82,89	165,54	117,06	87,02	100,48	117,06	165,54
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
osová síla [kN]	-0,37	-18,82	11,09	2,69	2,51	-0,41	-0,41	5,16
$D$ [mm]	33,70	51,00	33,70	33,70	33,70	33,70	33,70	33,70
$t$ [mm]	1,40	2,30	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40
$\sigma$ [MPa]	-2,57	-53,49	78,03	18,96	17,67	-2,87	-2,87	36,31
$k_{MSP}$	91,47	4,39	3,01	12,40	13,30	81,81	81,81	6,47
$k_{MSVS}$	46,84	3,84	$\infty$	$\infty$	$\infty$	33,52	33,52	$\infty$
$\lambda$	131,23	100,48	75,76	131,23	75,76	146,72	146,72	529,65

Vybráním čtyř různých průřezů a jejich následným rozdělením prutů soustavy se navrhla soustava, u které je v každém místě hodnota bezpečnosti vyšší než požadovaná. Oproti soustavě s totožným průřezem prutů jsou bezpečnosti v prutech nižší, lze tedy říci, že se docílilo navržnutí méně naddimenzované soustavy. Díky zmenšení průřezů méně zatížených prutů soustavy se snížila celková hmotnost konstrukce, a to přibližně o 43 %, výpočet hmotností lze nalézt v příloze F. Zvolením čtyř průřezů také došlo k omezení nejmenšího možného průřezu, tím se předešlo situaci, kdy byly pro téměř nezátížené pruty navrhovány nesmyslně malé průřezy, viz pruty číslo 17, 22 a 23. Z výrobního hlediska se ale jedná o složitější řešení.

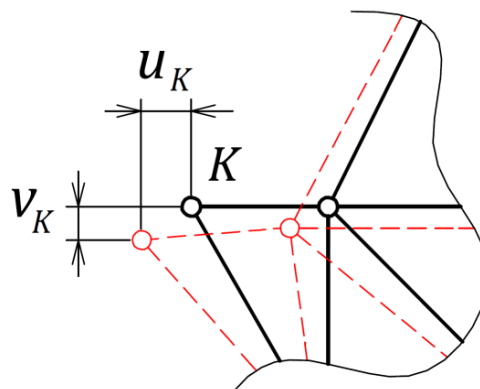
#### 4.5. Výpočet deformace prutové soustavy

Vlivem zatížení soustavy dochází k jejímu deformování. Použitím Castiglianovy věty lze v libovolném styčnicku prutové soustavy vypočítat jeho deformační posuv, viz vztah (3–10). Pro výpočet deformace soustavy byl vybrán styčník  $K$ . Velikost deformace bude určena pro soustavu s navrženými různými průřezy prutů podle tabulky 4.6.

K posuvu styčnicku dochází ve svislém i v horizontálním směru. Ve styčnicku  $K$  působí pouze zatěžující síla  $F_1$ , pomocí které lze vypočítat posuv ve svislém směru. V horizontálním směru žádná zatěžující síla nepůsobí. Aby bylo možné vypočítat posuv v horizontálním směru, zavede se do styčnicku  $K$  doplňková síla o nulové velikosti  $F_{DOP} = 0 \text{ N}$ , která nebude mít na napjatost a deformaci soustavy vliv, obrázek 4.32.



Obr. 4.32 Zavedení doplňkové síly do styčnicku  $K$ .



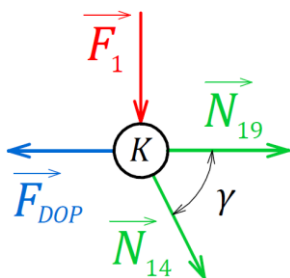
Obr. 4.33 Deformační posuvy styčnicku  $K$ .

Posuvy styčnicku  $K$  v horizontálním a ve svislém směru  $v_K$  a  $u_K$  (Obr. 4.32) lze potom spočítat z následujících vztahů. Za energii napjatosti  $W$  je potřeba dosadit energii celé soustavy, včetně prutu číslo 24.

$$u_K = \frac{\partial W}{\partial F_{DOP}} = \sum_{i=1}^{24} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{DOP}} \quad (4-8)$$

$$v_K = \frac{\partial W}{\partial F_1} = \sum_{i=1}^{24} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_1} \quad (4-9)$$

Zavedením nové síly se změnila soustava rovnic pro řešení osových sil v prutech. Je potřeba přepsat rovnice statické rovnováhy styčnicku  $K$ , viz obr 4.34.



Styčník  $K$ :

$$\sum F_x = 0: \quad N_{14} \cdot \cos \gamma + N_{19} - F_{DOP} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -N_{14} \cdot \sin \gamma - F_1 = 0$$

Obr. 4.34 Styčník  $K$  s doplňkovou silou.

Následně je možné z pozměněné soustavy rovnic (včetně deformační podmínky) vyjádřit velikosti osových sil v závislosti na  $F_{DOP}$  a  $F_1$  a vypočítat potřebné derivace, které se pak společně s hodnotami osových sil, ploch průřezů, délek prutů a modulu pružnosti v tahu dosadí do vztahů (4–8) a (4–9).

**Velikost posuvu styčnicku  $K$  v horizontálním směru:**

$$u_K = \frac{\partial W}{\partial F_{DOP}} = \sum_{i=1}^{24} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_{DOP}} = 5,121 \text{ mm}$$

**Velikost posuvu styčnicku  $K$  ve svislém směru:**

$$v_K = \frac{\partial W}{\partial F_1} = \sum_{i=1}^{24} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_1} = 4,030 \text{ mm}$$

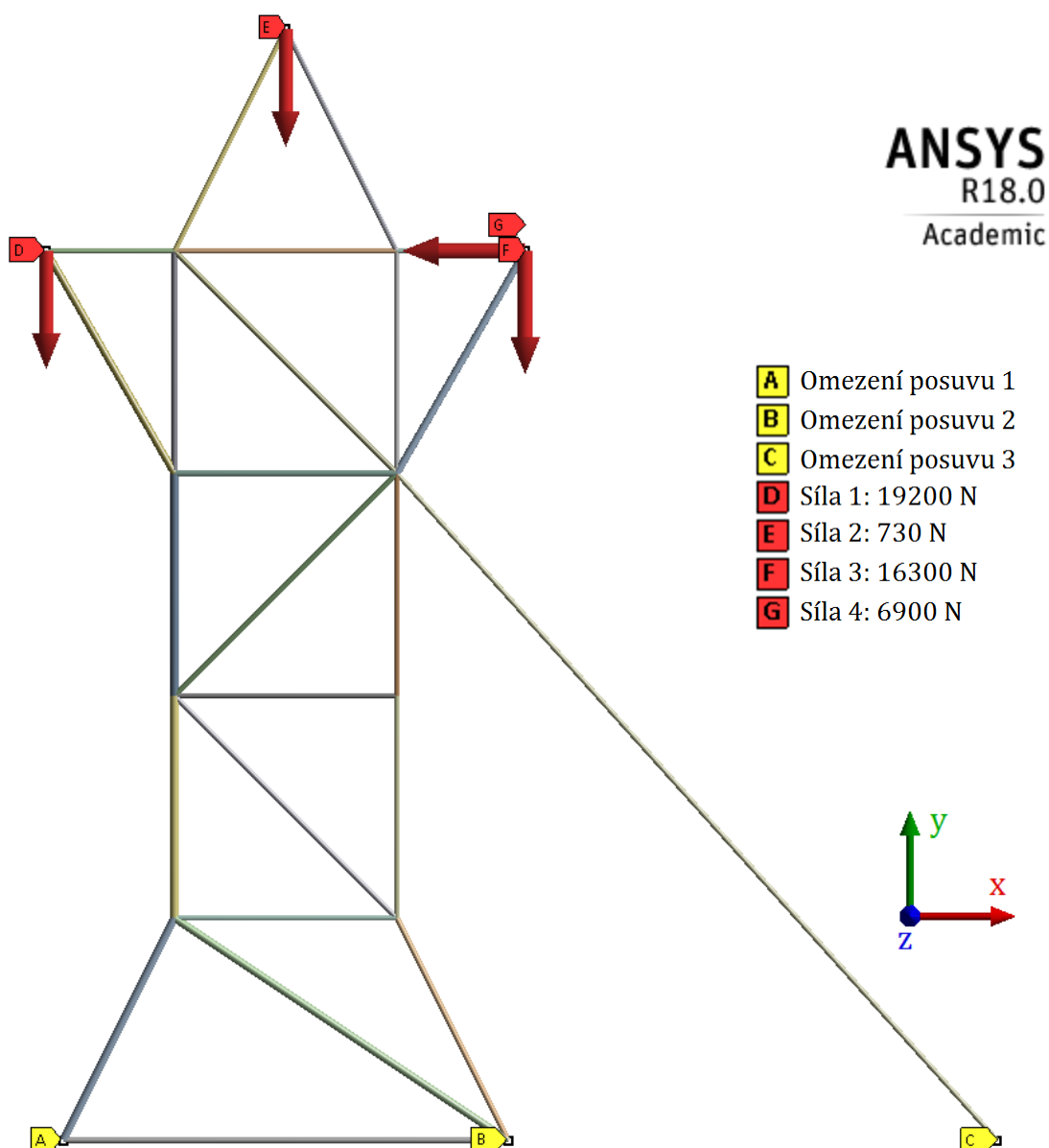
Vyčíslení velikosti posuvu je součástí skriptů pro software MATLAB, které lze najít na přiloženém CD. V naprogramovaném skriptu byly obdobným způsobem vypočítány velikosti deformačních posuvů styčnicku  $L$  podle sil  $F_3$  a  $F_4$  a styčnicku  $M$  podle síly  $F_2$ . Výsledné hodnoty lze vidět v tabulce 4.7.

**Tab. 4.7** Deformační posuvy.

deformační posuvy styčnicků $K$ , $L$ , $M$	
$u_K$ [mm]	5,121
$v_K$ [mm]	4,030
$u_L$ [mm]	4,591
$v_L$ [mm]	0,564
$v_M$ [mm]	1,749

#### 4.6. Numerická verifikace analytického výpočtu

Ověření analytického řešení bylo provedeno numerickým výpočtem prutové soustavy s různými průřezy navrženými v kapitole 4.4.2, viz tabulka 4.6. Pro výpočet byl použit program ANSYS Workbench. Při vytváření výpočtového modelu soustavy se nejdříve rozmístily střednice všech prutů, a následně jim byly jednotlivě přiřazeny příslušné průřezy podle tabulky 4.6. Tím bylo vytvořeno dvacet čtyři prutových těles, které byly poté spojeny do jednoho dílu, aby byla zajištěna jejich interakce. Následně se na výpočtový model zadaly okrajové podmínky podle zadání úlohy, viz obrázek 4.35. V bodech A a C byl omezen posuv ve všech směrech, v bodě B zůstal posuv volný ve směru osy  $x$ .

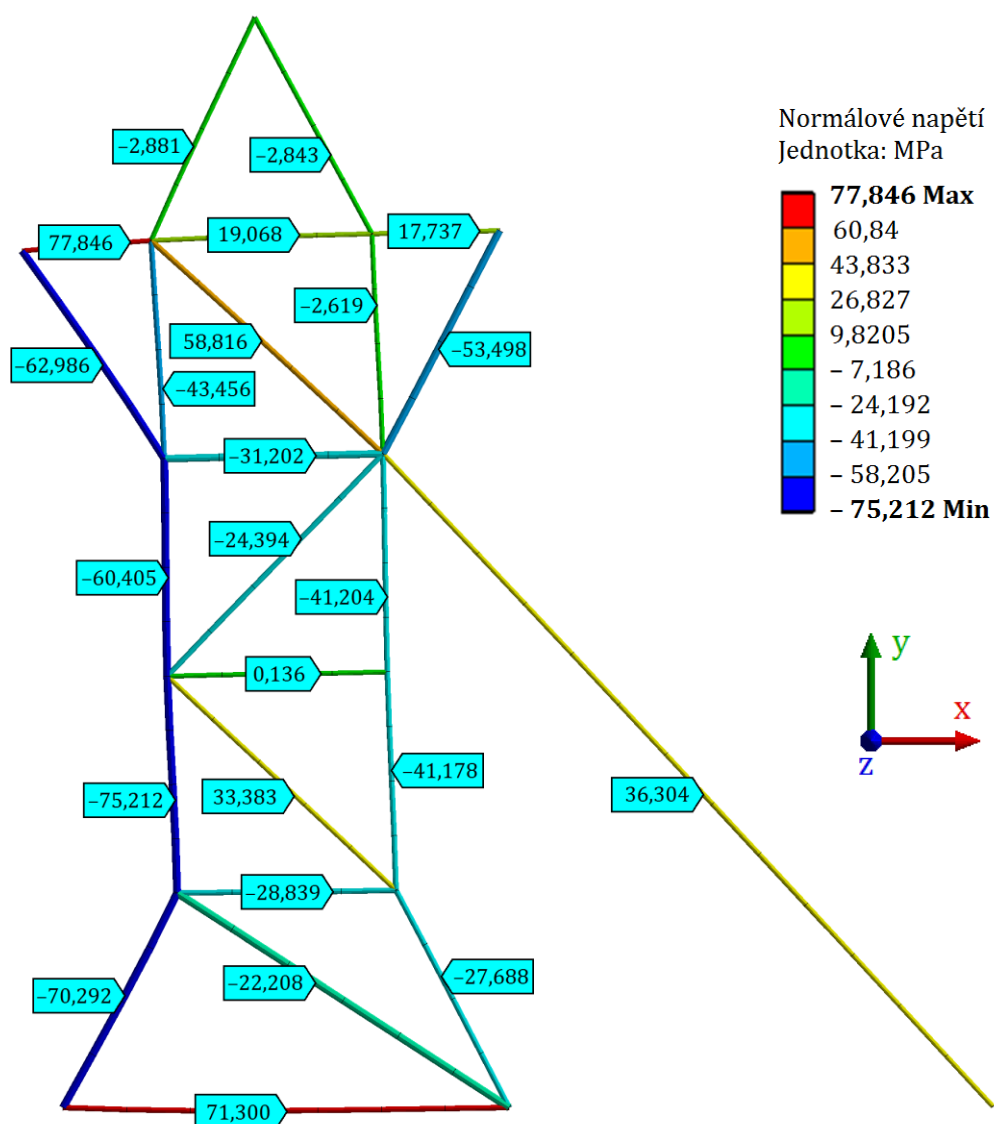


*Obr. 4.35 Výpočtový model s okrajovými podmínkami.*

Hodnoty napětí v jednotlivých prutech získané numerickým řešením lze vidět na obrázku 4.36. Porovnání výsledků analytického a numerického výpočtu je uvedeno v tabulce 4.8.

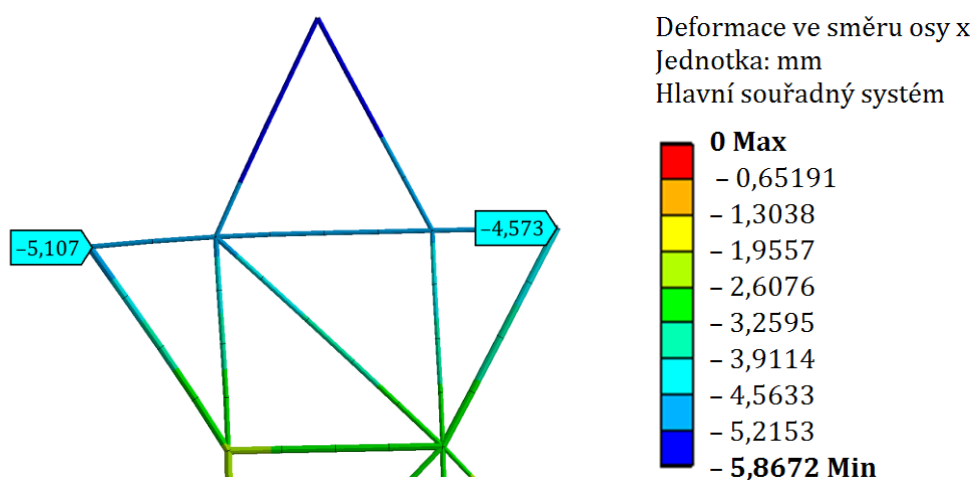
Tab. 4.8 Napětí v prutech (numericky).

číslo prutu	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma$ [MPa] analyticky	71,47	-70,27	-22,37	-27,45	-29,13	-75,26	34,34	-41,40
$\sigma$ [MPa] numericky	71,30	-70,29	-22,21	-27,69	-28,84	-75,21	33,38	-41,18
odchylka [%]	0,23	0,04	0,75	0,85	0,99	0,06	2,77	0,55
číslo prutu	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma$ [MPa] analyticky	0,00	-60,44	-23,83	-41,40	-31,50	-63,00	-43,67	59,24
$\sigma$ [MPa] numericky	0,14	-60,41	-24,39	-41,20	-31,20	-62,99	-43,46	58,82
odchylka [%]	–	0,06	2,37	0,48	0,95	0,03	0,49	0,71
číslo prutu	17	18	19	20	21	22	23	24
$\sigma$ [MPa] analyticky	-2,57	-53,49	78,03	18,96	17,67	-2,87	-2,87	36,31
$\sigma$ [MPa] numericky	-2,62	-53,50	77,85	19,07	17,74	-2,88	-2,84	36,30
odchylka [%]	1,93	0,02	0,24	0,58	0,36	0,30	1,03	0,02

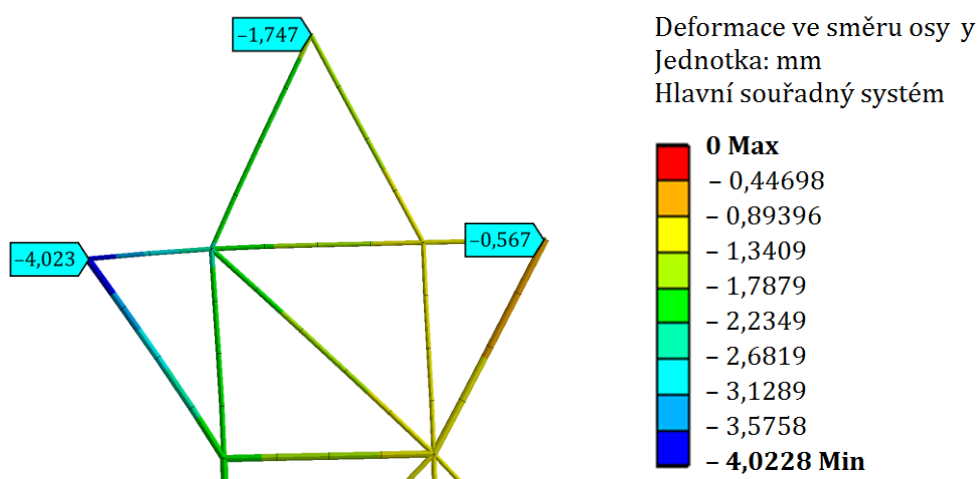


Obr. 4.36 Napětí v jednotlivých prutech.

Deformační posuvy ve směru os  $x$  a  $y$  získané numerickým řešením lze vidět na obrázcích 4.37 a 4.38. Porovnání hodnot analytického a numerického řešení je uvedeno v tabulce 4.9.



*Obr. 4.37 Deformace ve směru osy  $x$ .*



*Obr. 4.38 Deformace ve směru osy  $y$ .*

*Tab. 4.9 Deformační posuvy (numericky).*

deformační posuv	$u_K$	$v_K$	$u_L$	$v_L$	$v_M$
analyticky [mm]	5,121	4,030	4,591	0,564	1,749
numericky [mm]	5,107	4,023	4,573	0,567	1,747
odchylka [%]	0,278	0,179	0,395	0,486	0,124

Z hodnot v tabulkách 4.8 a 4.9 je patrné, že analytickým a numerickým řešením se dostaly prakticky shodné výsledky. Mírné odchylky jsou způsobeny použitím prvku beam, který kromě tlakového a tahového napětí přenáší i ohybové.



## 5 Závěr

Bakalářská práce se zabývala tématem prutových soustav, jejich teoretickým popisem a následným řešením konkrétního příkladu.

Obsahem první části bakalářské práce byl stručný teoretický rozbor prutových soustav, ve kterém byly, kromě jiného, popsány předpoklady prutových soustav, způsob posouzení jejich statické určitosti a následně rozebrány různé metody statického řešení. V navazující kapitole zabývající se namáháním těles prutových soustav a s ním spojenými mezními stavy byly odvozeny vztahy, které se poté aplikovaly v praktické části.

Druhá část práce byla věnována praktické ukázce řešení konkrétního příkladu prutové soustavy ve tvaru elektrického stožáru. Nejprve byl proveden analytický výpočet, jehož výsledky byly následně verifikovány pomocí numerického řešení. Prvním krokem analytického výpočtu bylo vyčíslení osových sil v prutech, během něhož byla konstrukce soustavy dvakrát pozměněna za účelem co největšího snížení maximálních velikostí osových sil. V první a druhé variantě se jednalo o staticky určitou prutovou soustavu. Konstrukční úprava druhé varianty spočívala ve změně umístění jednoho z prutů soustavy, čímž bylo dosaženo zmenšení velikosti osově síly v nejvíce zatíženém prutu varianty první. Ve třetí variantě se ponechala konstrukční úprava z druhé varianty a nově se k prutové soustavě z boku připevnil výstužný prut, který pevně spojil jeden ze styčníků soustavy se zemí. Soustava se tak stala staticky neurčitou, bylo ji tedy potřeba částečně uvolnit a sepsat deformační podmínku. Přidáním prutu se docílilo snížení velikostí osových sil ve dvou nejvíce zatížených prutech předešlé varianty. Tato varianta byla použita k dalším výpočtům.

Vybrané variantě soustavy byl následně navrhnut totožný průřez všem prutům tak, aby v každém z nich splňoval požadavek minimální bezpečnosti k zvoleným mezním stavům. Méně zatížené pruty však byly značně naddimenzovány, což lze považovat za nevýhodu tohoto návrhu. Dále byl pro každý prut zvlášť navrhnut teoretický průřez, při kterém byly uvažovány velikosti osových sil z předchozích výpočtů. Jelikož však byl předpokladem výpočtu těchto sil totožný průřez všech prutů, byly velikosti skutečných sil v prutech odlišné. Z tohoto důvodu byly přepočítané bezpečnosti v některých prutech nižší než požadovaná hodnota. Pokud se tedy při návrhu různých průřezů prutů staticky neurčité prutové soustavy v deformační podmínce uvažují při výpočtu osových sil totožné velikosti ploch průřezů, je potřeba počítat s následnou změnou velikostí osových sil. Hlavním nedostatkem teoretických průřezů však byly jejich prakticky nevyrobitelné rozměry. Proto byly dle normy vybrány čtyři průřezy, z nichž se každému prutu přiřadil co nejmenší možný. Rozdělením čtyř různých průřezů prutům soustavy byl vytvořen návrh, který pro všechny pruty splňoval požadavek minimální bezpečnosti, a zároveň ušetřil přibližně 43 % celkové hmotnosti konstrukce oproti návrhu s totožnými průřezy. Pro soustavu se čtyřmi různými průřezy prutů byla v dalším kroku vypočtena deformace ve styčnicích zatížených vnějšími silami. V závěru praktické části se provedlo ověření výsledků analytického výpočtů pomocí metody konečných prvků, výsledky se v podstatě nelišily, k malým odchylkám došlo z důvodu použití prutových prvků, které přenášejí i ohybový moment.



## Seznam použitých zdrojů

- [1] ULRICH, Roger Bradley. *Roman woodworking*. New Haven [CT]: Yale University Press, 2007, 375 s. ISBN 978-0-300-10341-0.
- [2] JULIŠ, Karel, Adolf SLAVÍK a Otakar TEPŘÍK. *Statika*. Praha: SNTL, 1987, 212 s.: il.
- [3] ŠREJTR, Josef. *Technická mechanika I. Statika*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1957, 530 s.
- [4] JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. *Mechanika I. díl Statika a kinematika*. Praha: SNTL, 1986, 477 s.: il.
- [5] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK a Jan VRBKA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-X
- [6] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. *Mechanika těles: statika*, 7. vyd. Brno: CERM, 2007, 182 s. ISBN 978-80-214-3440-0
- [7] HORNÍKOVÁ, Jana, Jiří BURŠA a Pavel ŠANDERA. *Pružnost a pevnost: Interaktivní učební text*. Brno: CERM, 2003. ISBN 80-7204-268-8.
- [8] YOUNG, Warren C a Richard G BUDYNAS. *Roark's formulas for stress and strain*. 7th ed. Boston: McGraw-Hill, 2002, 852 s. ISBN 0-07-121059-8.
- [9] ARQtividad: #Roma: CIUDAD DEL VATICANO. ARQtividad [online] [cit. 17.05.2017]. Dostupné z: <http://arqtividad.blogspot.cz/2014/03/roma-ciudad-del-vaticano.html>
- [10] Forth bridge panoramic | Flickr. Find your inspiration. | Flickr [online] [cit. 17.05.2017]. Dostupné z: <https://www.flickr.com/photos/everywherephoto/20224688809/in/photostream/>
- [11] BAUGHN, James. Bridgehunter.com | Hellgate Bridge. Bridgehunter.com: Historic Bridges of the United States [online]. Copyright © 2002 [cit. 17.05.2017]. Dostupné z: <https://bridgehunter.com/or/josephine/hellgate/>

## Seznam použitých zkratk a symbolů

$d$	$[m]$	vnitřní průměr průřezu
$D$	$[m]$	vnější průměr průřezu
$E$	$[MPa]$	Modul pružnosti v tahu (Youngův modul)
$F$	$[N]$	síla
$F_V$	$[N]$	kritická vzpěrná síla
$J_{min}$	$[m^4]$	minimální osový kvadratický moment průřezu
$k$	$[-]$	počet styčníků
$k_{MSP}$	$[-]$	součinitel bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti
$k_{MSVS}$	$[-]$	součinitel bezpečnosti k meznímu stavu vzpěrné stability
$l$	$[m]$	délka prutu
$N_i$	$[N]$	velikost osově síly v $i$ -tém prutu
$p$	$[-]$	počet prutů
$S$	$[m^2]$	plocha příčného průřezu
$s_{ext}$	$[-]$	stupeň vnější (externí) statické neurčitosti
$t$	$[m]$	tloušťka stěny průřezu
$u$	$[m]$	deformační posuv ve směru osy $x$
$v$	$[m]$	deformační posuv ve směru osy $y$
$W$	$[J]$	energie napjatosti
$\alpha$	$[-]$	součinitel uložení prutu
$\gamma$	$[-]$	střednice prutu
$\varepsilon_x$	$[-]$	délkové přetvoření ve směru osy $x$
$\lambda$	$[-]$	štíhlost prutu
$\lambda_K$	$[-]$	mezní štíhlost prutu
$\mu$	$[-]$	počet neznámých parametrů vnějších stykových sil
$\mu_P$	$[-]$	Poissonovo číslo
$\nu$	$[-]$	počet použitelných podmínek statické rovnováhy
$\sigma$	$[MPa]$	napětí
$\sigma_K$	$[MPa]$	mez kluzu
$\psi$	$[-]$	příčný průřez prutu
$\Omega_1$	$[-]$	jednonásobně elementární prvek
$\Omega_3$	$[-]$	trojnásobně elementární prvek

## Seznam příloh

- Příloha A – Výpočet délek prutů a neznámých úhlů mezi nimi.
- Příloha B – Soustava rovnic a množina neznámých parametrů pro řešení velikostí osových sil první varianty.
- Příloha C – Soustava rovnic a množina neznámých parametrů pro řešení velikostí osových sil druhé varianty.
- Příloha D – Soustava rovnic a množina neznámých parametrů pro řešení velikostí osových sil třetí varianty.
- Příloha E – Odvození vztahů pro výpočet totožného průřezu všech prutů soustavy.
- Příloha F – Výpočet hmotností prutových soustav s navrženými totožnými a různými průřezy.
- Příloha G – Kompaktní disk se skripty ze softwaru MATLAB a s tabulkami výsledných hodnot a grafů v Microsoft Excel.

## Seznam tabulek

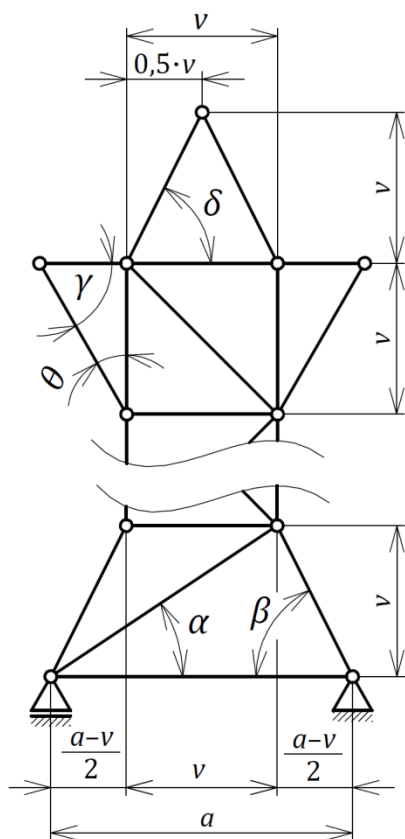
Tab. 4.1	Velikosti osových sil v prutech pro první variantu (mínus značí namáhání tlakem). .....	41
Tab. 4.2	Velikosti osových sil v prutech pro druhou variantu (mínus značí namáhání tlakem). .....	45
Tab. 4.3	Velikosti osových sil v prutech pro třetí variantu (mínus značí namáhání tlakem). .....	51
Tab. 4.4	Hodnoty bezpečností $k_{MSP}$ , $k_{MSVS}$ a štíhlostí $\lambda$ prutů se zvoleným totožným průřezem. ....	55
Tab. 4.5	Přepočítané hodnoty pro teoretické průřezy. ....	57
Tab. 4.6	Přepočítané hodnoty pro zvolenou čtveřici průřezů. ....	59
Tab. 4.7	Deformační posuvy. ....	61
Tan. 4.8	Napětí v prutech (numericky). ....	63
Tab. 4.9	Deformační posuvy (numericky). ....	64

## Seznam obrázků

Obr. 1.1	Nástěnná malba baziliky sv. Petra z Vatikánu zobrazující její podobu ve čtvrtém století [9].	15
Obr. 1.2	Forth Bridge je železniční most nacházející se ve středním Skotsku severozápadně od Edinburgu. Byl postaven v roce 1890 a jeho celková délka činí 2500 metrů [10].	15
Obr. 2.1	Prut.	17
Obr. 2.2	Nýtovaný styčník mostu Hellgate Bridge přes řeku Rogue river v jihozápadním Oregonu [11].	18
Obr. 2.3	Ukázka řešení prutové soustavy obecnou početní styčníkovou metodou.	20
Obr. 2.4	Grafické řešení prutové soustavy postupnou styčníkovou metodou.	21
Obr. 2.5	Šipky ze styčníku ven značí tah, dovnitř tlak.	22
Obr. 2.6	Výsledný Cremonův diagram.	22
Obr. 2.7	Prutová soustava řešená průsečnou metodou.	22
Obr. 2.8	Řez vedený prutovou soustavou a uvolnění vnějších vazeb.	23
Obr. 2.9	Prutová soustava rozdělena řezem na dvě části.	23
Obr. 2.10	Ukázka řešeného příkladu pomocí metody Müller-Breslau [4].	24
Obr. 2.11	Nepřevedená prutová soustava.	25
Obr. 2.12	Převedená prutová soustava metodou myšlených kloubů.	25
Obr. 2.13	Nezjednodušená soustava [2].	26
Obr. 2.14	Zjednodušená soustava [2].	26
Obr. 3.1	Uvolněný elementární prvek $\Omega_1$ z tělesa namáhaného tahem [5].	27
Obr. 3.2	Průběh napětí u tělesa namáhaného tahem [5].	28
Obr. 3.3	Elementární síla v průřezu prutu [5].	28
Obr. 3.4	Trojnásobně elementární prvek $\Omega_3$ [5].	28
Obr. 3.5	Pracovní diagram tahové zkoušky materiálu s výraznou mezí kluzu.	30
Obr. 3.6	Závislost průhybu na velikosti zatěžující síly [5].	31
Obr. 3.7	Určení koeficientu $\alpha$ pro čtyři základní případy uložení [5].	32
Obr. 3.8	Závislost kritického napětí $\sigma_V$ na štíhlosti prutu $\lambda$ [5].	33
Obr. 4.1	Zadaná prutová soustava. Varianta první.	36
Obr. 4.2	Úplné uvolnění první varianty.	37
Obr. 4.3	Styčník A.	38
Obr. 4.4	Styčník B.	38
Obr. 4.5	Styčník C.	38
Obr. 4.6	Styčník D.	39

Obr. 4.7	Styčnick E.....	39
Obr. 4.8	Styčnick F.....	39
Obr. 4.9	Styčnick G. ....	39
Obr. 4.10	Styčnick H. ....	39
Obr. 4.11	Styčnick I.....	40
Obr. 4.12	Styčnick J. ....	40
Obr. 4.13	Styčnick K. ....	40
Obr. 4.14	Styčnick L.....	40
Obr. 4.15	Styčnick M. ....	40
Obr. 4.16	Graf velikostí osových sil v prutech pro první variantu. ....	41
Obr. 4.17	Prutová soustava. Varianta druhá. ....	42
Obr. 4.18	Úplné uvolnění druhé varianty. ....	43
Obr. 4.19	Styčnick A (II).....	44
Obr. 4.20	Styčnick B (II).....	44
Obr. 4.21	Styčnick C (II).....	44
Obr. 4.22	Styčnick D (II).....	44
Obr. 4.23	Graf velikostí osových sil v prutech první a druhé varianty.....	45
Obr. 4.24	Prutová soustava. Varianta třetí.....	46
Obr. 4.25	Úplné uvolnění třetí varianty.....	47
Obr. 4.26	Styčnick H (III).....	48
Obr. 4.27	Částečné uvolnění třetí varianty. ....	49
Obr. 4.28	Graf velikostí osových sil v prutech první, druhé a třetí varianty. ....	51
Obr. 4.29	Zvolený profil prutů a jeho průřezové charakteristiky. ....	52
Obr. 4.30	Napětí v prutech s totožným průřezem.....	55
Obr. 4.31	Srovnání napětí v prutech soustav s totožnými a různými průřezy. ....	58
Obr. 4.32	Zavedení doplňkové síly do styčnicku K. ....	60
Obr. 4.33	Deformační posuvy styčnicku K. ....	60
Obr. 4.34	Styčnick K s doplňkovou silou.....	60
Obr. 4.35	Výpočtový model s okrajovými podmínkami. ....	62
Obr. 4.36	Napětí v jednotlivých prutech.....	63
Obr. 4.37	Deformace ve směru osy x. ....	64
Obr. 4.38	Deformace ve směru osy y. ....	64

# Příloha A



Výpočet úhlů:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{v}{\frac{a-v}{2} + v}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot v}{a+v}\right)$$

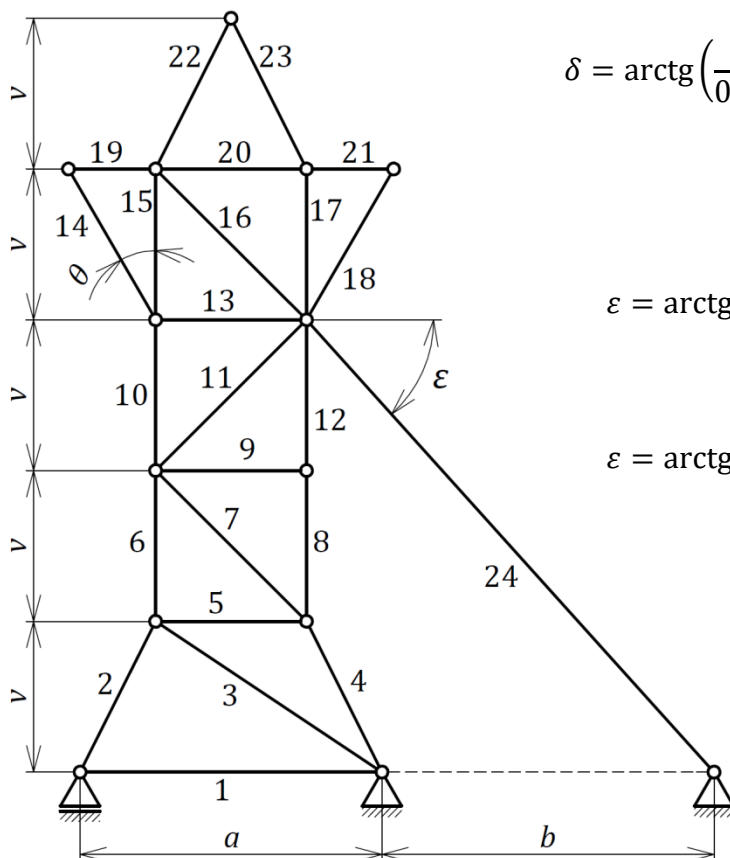
$$\alpha = \arctg\left(\frac{2 \cdot 1,5}{3 + 1,5}\right) = 33,690^\circ$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{v}{\frac{a-v}{2}}\right) = \arctg\left(\frac{2 \cdot v}{a-v}\right)$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{2 \cdot 1,5}{3 - 1,5}\right) = 63,435^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\delta = \arctg\left(\frac{v}{0,5 \cdot v}\right) = \arctg(2) = 63,435^\circ$$



$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{3 \cdot v}{b + \frac{a-v}{2}}\right)$$

$$\varepsilon = \arctg\left(\frac{3 \cdot 1,5}{3,3 + \frac{3-1,5}{2}}\right) = 48,013^\circ$$



**Výpočet délek prutů:**

$$L_1 = a = 3 \text{ m}$$

$$L_2 = L_4 = \frac{v}{\sin(\beta)} = \frac{1,5}{\sin(63,435^\circ)} = 1,677 \text{ m}$$

$$L_3 = \frac{v}{\sin(\alpha)} = \frac{1,5}{\sin(33,690^\circ)} = 2,704 \text{ m}$$

$$L_5 = L_6 = L_8 = L_9 = L_{10} = L_{12} = L_{13} = L_{15} = L_{17} = L_{20} = v = 1,5 \text{ m}$$

$$L_7 = L_{11} = L_{16} = \frac{v}{\sin(45^\circ)} = \sqrt{2} \cdot v = \sqrt{2} \cdot 1,5 = 2,121 \text{ m}$$

$$L_{14} = L_{18} = \frac{v}{\cos(\theta)} = \frac{1,5}{\cos(30^\circ)} = 1,732 \text{ m}$$

$$L_{19} = L_{21} = v \cdot \operatorname{tg}(\theta) = 1,5 \cdot \operatorname{tg}(30^\circ) = 0,866 \text{ m}$$

$$L_{22} = L_{23} = \frac{v}{\sin(\delta)} = \frac{1,5}{\sin(63,435^\circ)} = 1,677 \text{ m}$$

$$L_{24} = \frac{3 \cdot v}{\sin(\varepsilon)} = \frac{3 \cdot 1,5}{\sin(48,013^\circ)} = 6,054 \text{ m}$$

## Příloha B

### Soustava rovnic pro řešení osových sil první varianty:

$$N_1 + N_2 \cdot \cos \beta + N_3 \cdot \cos \alpha = 0$$

$$N_2 \cdot \sin \beta + N_3 \cdot \sin \alpha + F_{AY} = 0$$

$$-N_1 - N_4 \cdot \cos \beta - F_{BX} = 0$$

$$N_4 \cdot \sin \beta + F_{BY} = 0$$

$$N_5 - N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_6 - N_2 \cdot \sin \beta = 0$$

$$N_4 \cdot \cos \beta - N_3 \cdot \cos \alpha - N_5 - N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_7 \cdot \sin 45^\circ + N_8 - N_3 \cdot \sin \alpha - N_4 \cdot \sin \beta = 0$$

$$N_7 \cdot \cos 45^\circ + N_9 + N_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{10} + N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_6 - N_7 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$-N_9 = 0$$

$$N_{12} - N_8 = 0$$

$$N_{13} - N_{14} \cdot \cos \gamma = 0$$

$$N_{14} \cdot \sin \gamma + N_{15} - N_{10} = 0$$

$$N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{11} \cdot \cos 45^\circ - N_{13} - N_{16} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{16} \cdot \sin 45^\circ + N_{17} + N_{18} \cdot \sin \gamma - N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_{12} = 0$$

$$N_{16} \cdot \cos 45^\circ + N_{20} + N_{22} \cdot \cos \delta - N_{19} = 0$$

$$N_{22} \cdot \sin \delta - N_{15} - N_{16} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{21} - N_{20} - N_{23} \cdot \cos \delta = 0$$

$$N_{23} \cdot \sin \delta - N_{17} = 0$$

$$N_{14} \cdot \cos \gamma + N_{19} = 0$$

$$-N_{14} \cdot \sin \gamma - F_1 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{21} - F_4 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \sin \gamma - F_3 = 0$$

$$N_{23} \cdot \cos \delta - N_{22} \cdot \cos \delta = 0$$

$$-N_{22} \cdot \sin \delta - N_{23} \cdot \sin \delta - F_2 = 0$$

### Množina neznámých parametrů první varianty:

$$NP = \left\{ N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, \right. \\ \left. N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}, N_{20}, N_{21}, N_{22}, N_{23}, F_{AY}, F_{BX}, F_{BY} \right\}$$

## Příloha C

**Soustava rovnic pro řešení osových sil druhé varianty:**

$$N_1 + N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_2 \cdot \sin \beta + F_{AY} = 0$$

$$-N_1 - N_3 \cdot \cos \alpha - N_4 \cdot \cos \beta - F_{BX} = 0$$

$$N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \beta + F_{BY} = 0$$

$$N_3 \cdot \cos \alpha + N_5 - N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_6 - N_2 \cdot \sin \beta - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_4 \cdot \cos \beta - N_5 - N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_7 \cdot \sin 45^\circ + N_8 - N_4 \cdot \sin \beta = 0$$

$$N_7 \cdot \cos 45^\circ + N_9 + N_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{10} + N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_6 - N_7 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$-N_9 = 0$$

$$N_{12} - N_8 = 0$$

$$N_{13} - N_{14} \cdot \cos \gamma = 0$$

$$N_{14} \cdot \sin \gamma + N_{15} - N_{10} = 0$$

$$N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{11} \cdot \cos 45^\circ - N_{13} - N_{16} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{16} \cdot \sin 45^\circ + N_{17} + N_{18} \cdot \sin \gamma - N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_{12} = 0$$

$$N_{16} \cdot \cos 45^\circ + N_{20} + N_{22} \cdot \cos \delta - N_{19} = 0$$

$$N_{22} \cdot \sin \delta - N_{15} - N_{16} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{21} - N_{20} - N_{23} \cdot \cos \delta = 0$$

$$N_{23} \cdot \sin \delta - N_{17} = 0$$

$$N_{14} \cdot \cos \gamma + N_{19} = 0$$

$$-N_{14} \cdot \sin \gamma - F_1 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{21} - F_4 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \sin \gamma - F_3 = 0$$

$$N_{23} \cdot \cos \delta - N_{22} \cdot \cos \delta = 0$$

$$-N_{22} \cdot \sin \delta - N_{23} \cdot \sin \delta - F_2 = 0$$

**Množina neznámých parametrů druhé varianty:**

$$NP = \left\{ N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, \right. \\ \left. N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}, N_{20}, N_{21}, N_{22}, N_{23}, F_{AY}, F_{BX}, F_{BY} \right\}$$

## Příloha D

### Soustava rovnic pro řešení osových sil třetí varianty:

$$N_1 + N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_2 \cdot \sin \beta + F_{AY} = 0$$

$$-N_1 - N_3 \cdot \cos \alpha - N_4 \cdot \cos \beta - F_{BX} = 0$$

$$N_3 \cdot \sin \alpha + N_4 \cdot \sin \beta + F_{BY} = 0$$

$$N_3 \cdot \cos \alpha + N_5 - N_2 \cdot \cos \beta = 0$$

$$N_6 - N_2 \cdot \sin \beta - N_3 \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_4 \cdot \cos \beta - N_5 - N_7 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_7 \cdot \sin 45^\circ + N_8 - N_4 \cdot \sin \beta = 0$$

$$N_7 \cdot \cos 45^\circ + N_9 + N_{11} \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{10} + N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_6 - N_7 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$-N_9 = 0$$

$$N_{12} - N_8 = 0$$

$$N_{13} - N_{14} \cdot \cos \gamma = 0$$

$$N_{14} \cdot \sin \gamma + N_{15} - N_{10} = 0$$

$$N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{11} \cdot \cos 45^\circ - N_{13} - N_{16} \cdot \cos 45^\circ + F_H \cdot \cos \varepsilon = 0$$

$$N_{16} \cdot \sin 45^\circ + N_{17} + N_{18} \cdot \sin \gamma - N_{11} \cdot \sin 45^\circ - N_{12} - F_H \cdot \sin \varepsilon = 0$$

$$N_{16} \cdot \cos 45^\circ + N_{20} + N_{22} \cdot \cos \delta - N_{19} = 0$$

$$N_{22} \cdot \sin \delta - N_{15} - N_{16} \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$N_{21} - N_{20} - N_{23} \cdot \cos \delta = 0$$

$$N_{23} \cdot \sin \delta - N_{17} = 0$$

$$N_{14} \cdot \cos \gamma + N_{19} = 0$$

$$-N_{14} \cdot \sin \gamma - F_1 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \cos \gamma - N_{21} - F_4 = 0$$

$$-N_{18} \cdot \sin \gamma - F_3 = 0$$

$$N_{23} \cdot \cos \delta - N_{22} \cdot \cos \delta = 0$$

$$-N_{22} \cdot \sin \delta - N_{23} \cdot \sin \delta - F_2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{23} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_H} = - \frac{N_{24} \cdot l_{24}}{E \cdot S_{24}} \cdot \frac{\partial N_{24}}{\partial F_H}$$

### Množina neznámých parametrů třetí varianty:

$$NP = \left\{ N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}, N_{14}, \right. \\ \left. N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}, N_{19}, N_{20}, N_{21}, N_{22}, N_{23}, F_H, F_{AY}, F_{BX}, F_{BY} \right\}$$

## Příloha E

### 1) Výběr průřezu zvolením nejbližší normované tloušťky stěny $t$

Dopočetní vnější průměru ze vztahu pro mezní stav pružnosti:

$$k_{MSP} = \frac{\sigma_K \cdot \pi \cdot (D^2 - d^2)}{N_{MSP}} = \frac{\sigma_K \cdot \pi \cdot (D^2 - (D - 2t)^2)}{N_{MSP}} = \frac{\sigma_K \cdot \pi \cdot (D^2 - (D^2 - 4Dt + 4t^2))}{N_{MSP}}$$

$$4Dt = \frac{k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{\sigma_K \cdot \pi} + 4t^2 \rightarrow D = \frac{k_{MSP} \cdot N_{MSP}}{4 \cdot \sigma_K \cdot \pi \cdot t} + t$$

Dopočetní vnější průměru ze vztahu pro mezní stav vzpěrné stability:

$$k_{MSVS} = \frac{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi \cdot J_{min}}{l^2 \cdot N_{MSVS}} = \frac{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi \cdot (D^4 - d^4)}{l^2 \cdot N_{MSVS}} = \frac{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi \cdot (D^4 - (D - 2t)^4)}{l^2 \cdot N_{MSVS}}$$

$$\frac{k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi} = (D^4 - (D^4 - 8tD^3 + 24t^2D^2 - 32t^3D + 16t^4))$$

$$8tD^3 - 24t^2D^2 + 32t^3D - \left(16t^4 + \frac{k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N_{MSVS}}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi}\right) = 0$$

Ze spočtených dvou vnějších průměrů se vybere větší z nich a následně se z normy vybere nejbližší vyšší. Tím se získají rozměry prvního normovaného průřezu.

### 2) Výběr průřezu zvolením z normy nejbližšího vnějšího průměru $D$

Dopočetní vnitřního průměru ze vztahu pro mezní stav pružnosti:

$$\frac{\pi \cdot (D^2 - d^2)}{4} = \frac{k_{MSP} \cdot N}{\sigma_K} \rightarrow d = \sqrt{D^2 - \frac{4 \cdot k_{MSP} \cdot N}{\pi \cdot \sigma_K}}$$

Dopočetní vnitřního průměru ze vztahu pro mezní stav vzpěrné stability:

$$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64} = \frac{k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N}{\alpha^2 \cdot E} \rightarrow d = \sqrt[4]{D^4 - \frac{64 \cdot k_{MSVS} \cdot l^2 \cdot N}{\alpha^2 \cdot E \cdot \pi}}$$

Ze spočtených dvou vnitřních průměrů se vybere menší, dopočte se teoretická minimální tloušťka stěny a z normy se vybere nejbližší vyšší. Tím se získají rozměry druhého normovaného průřezu.

## Příloha F

**Obecný vzorec pro výpočet hmotnosti soustavy:**

$$m = \sum_{i=1}^{24} \rho_i \cdot S_i \cdot l_i$$

$m$	$[kg]$	hmotnost soustavy
$\rho_i$	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota materiálu prutu
$S_i$	$[m^2]$	plocha průřezu prutu
$l_i$	$[m]$	délka prutu

**Výpočet hmotnosti soustavy s totožným průřezem:**

$$m_{totozne} = \sum_{i=1}^{24} \rho_i \cdot S_i \cdot l_i = \rho \cdot S \cdot \sum_{i=1}^{24} l_i = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D^2 - d^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^{24} l_i$$

$$m_{totozne} = 148,397 \text{ kg}$$

**Výpočet hmotnosti soustavy s vybranou čtveřicí průřezů:**

$$m_{ruzne} = \sum_{i=1}^{24} \rho_i \cdot S_i \cdot l_i = \rho \cdot \sum_{i=1}^{24} S_i \cdot l_i = \frac{\rho \cdot \pi}{4} \cdot \sum_{i=1}^{24} (D_i^2 - d_i^2) \cdot l_i$$

$$m_{ruzne} = 84,471 \text{ kg}$$

**Výpočet úspory materiálu:**

$$Uspora = \frac{m_{totozne} - m_{ruzne}}{m_{totozne}} = \frac{148,397 - 84,471}{148,397} = 0,431$$

$$Uspora = 43,1 \%$$